Thévenin y Norton.

Para el circuito mostrado en la Figura 1 determine lo siguiente:

La resistencia Thévenin entre el nodo de conexión de las resistencias R_2, R_3 y R_4, con el nodo de conexión de las fuentes de voltaje y de corriente dependientes y R_7.

1. Con una fuente de corriente independiente de 1[A].
2. Con una fuente de voltaje independiente de 1[V].
3. Hallando la corriente Norton y voltaje Thévenin entre dichos puntos

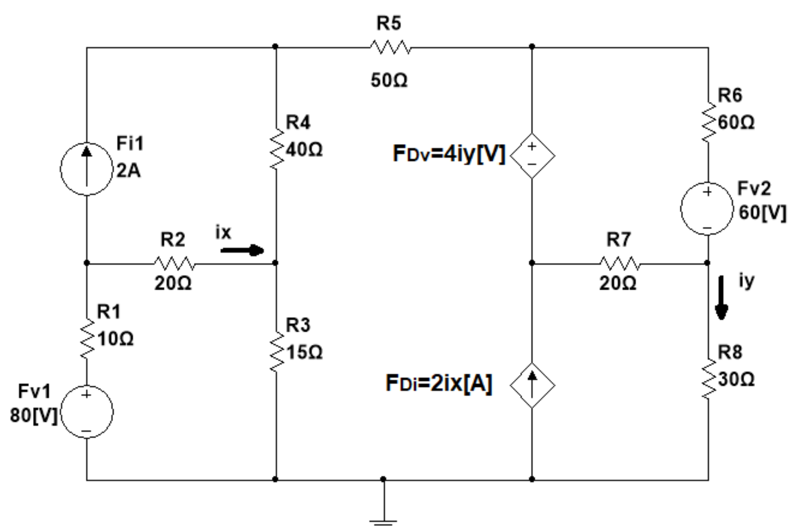

Figura 1

Solución:

Fuente de corriente de 1[A].

A cada uno de los elementos le asignamos una polaridad correspondiente y aginamos nombres y dirección a cada una de las mallas dentro del circuito.

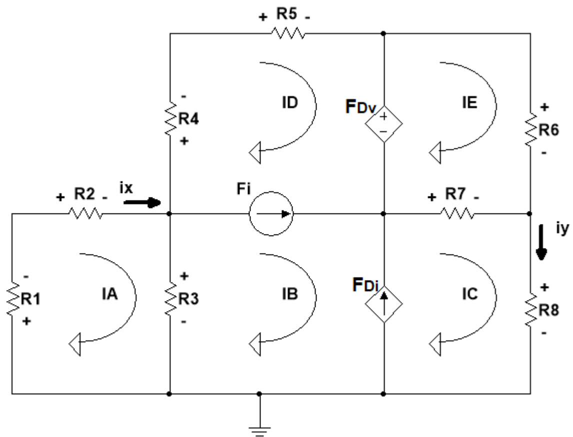

Figura 2

Reescribimos cada una de las variables presentes en el circuito las cuales se utilizarán en términos más generales dentro de la solución.

$$F_i = 1[A]$$

$$F_i = (I_B - I_D)$$

$$I_D = I_B - F_i \tag{1}$$

-

$$F_{Di} = 2I_y$$

$$I_y = I_A$$

$$F_{Di} = (I_C - I_B)$$

$$2I_A = I_C - I_B$$

$$I_C = 2I_A + I_B \tag{2}$$

Se utiliza la ley de tensiones de Kirchhoff para cada una de las mallas correspondiente.

LVK malla $I_A \sum V = 0$

$$V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = 0$$

$$V_{R1} = I_A R_1\,;\, V_{R2} = I_A R_2\,;\, V_{R3} = (I_A - I_B)\, R_3$$

$$I_A R_1 + I_A R_2 + (I_A - I_B)\, R_3 = 0$$

$$I_A\,(R_1 + R_2 + R_3) - I_B R_3 = 0$$

$$45 I_A - 15 I_B = 0 \tag{3}$$

LVK malla $I_E \sum V = 0$

$$-V_{FD} + V_{R6} - V_{R7} = 0$$

$$V_{FD} = 4 I_C\,;\, V_{R6} = I_E R_6\,;\, V_{R7} = (I_C - I_E)\, R_7$$

$$-4 I_C + I_E R_6 - (I_C - I_E)\, R_7 = 0$$

$$-24\,(2 I_A + I_B) + 80 I_E = 0$$

$$-48 I_A - 24 I_B + 80 I_E = 0 \tag{4}$$

LVK malla super malla$\sum V = 0$

$$V_{R4} + V_{R5} + V_{R6} + V_{R8} - V_{R3} = 0$$

$$V_{R4} = I_D R_4\,;\, V_{R5} = I_D R_5\,;\, V_{R6} = I_E R_6\,;\, V_{R8} = I_C R_8\,;\, V_{R3} = (I_A - I_B)\, R_3$$

$$I_D R_4 + I_D R_5 + I_E R_6 + I_C R_8 - (I_A - I_B)\, R_3 = 0$$

$$-I_A R_3 + I_B R_3 + I_C R_8 + I_D\,(R_4 + R_5) + I_E R_6 = 0$$

$$-15 I_A + 15 I_B + 30\,(2 I_A + I_B) + 90\,(I_B - 1) + 60 I_E = 0$$

$$45 I_A + 135 I_B + 60 I_E = 90 \tag{5}$$

Llegamos a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas el cual consiste por las ecuaciones 3, 4 y 5.

$$45I_A - 15I_B = 0$$

$$-48I_A - 24I_B + 80I_E = 0$$

$$45I_A + 135I_B + 60I_E = 90$$

Generamos una matriz en la cual hallaremos los valores de voltaje para I_B, I_Cy I_E.

$$\begin{bmatrix} 45 & -15 & 0 \\ -48 & -24 & 80 \\ 45 & 135 & 60 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_B \\ I_C \\ I_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$I_A = 166.6[mA]\,;\, I_B = 500[mA]\,;\, I_E = 250[mA]$$

Para hallar la resistencia Thévenin entre los terminales, es necesario conocer la tensión sobre la fuente de corriente. Por lo cual se realiza un proceso para hallar dicho valor.

Para la malla I_C reemplazos sobre la siguiente ecuación.

$$I_C = 2I_A + I_B$$

$$I_C = 2\left(166.6\text{x}10^{-3}\right) + 500\text{x}10^{-3}$$

$$I_C = 833.2[mA]$$

Resistencia R3.

$$V_{R3} = I_{R3}R_3 = \left(I_A - I_B\right)R_3$$

$$V_{R3} = \left(166.6\text{x}10^{-3} - 500\text{x}10^{-3}\right) \cdot 15$$

$$V_{R3} = -5[V]$$

$$V_{R3} = -5[V] = V_{N2}$$

Resistencia R8.

$$V_{R8} = I_{R8}R_8 = I_CR_8$$

$$V_{R8} = 833.2\text{x}10^{-3} \cdot 30$$

$$V_{R8} = 25[V]$$

$$V_{R8} = 25[V] = V_{N6}$$

Resistencia R7.

$$V_{R7} = I_{R7}R_7 = (I_C - I_E)\,R_7$$

$$V_{R7} = \left(833.2\text{x}10^{-3} - 250\text{x}10^{-3}\right)\cdot 20$$

$$V_{R7} = 11.7[V]$$

Diferencia de potencial para R7.

.

$$V_{R7} = V_{N5} - V_{N6}$$

$$V_{N5} = V_{R7} + V_{N6}$$

$$V_{N5} = 11.7 + 25$$

$$V_{N5} = 36.7[V]$$

A partir de los voltajes en los diferentes nodos se hallará la diferencia de potencial en la fuente de corriente.

$$V_i = V_{N5} - V_{N2}$$

$$V_i = 36.7 + 5$$

$$V_i = 41.7[V]$$

La resistencia Thévenin es igual a:

$$R_{Th} = \frac{V_i}{I_i}$$

$$R_{Th} = \frac{41.7}{1}$$

$$R_{Th} = 41.7[\Omega]$$

Fuente de voltaje de 1[V].

Asignamos una dirección de corriente para las corrientes salientes de los nodos del circuito.

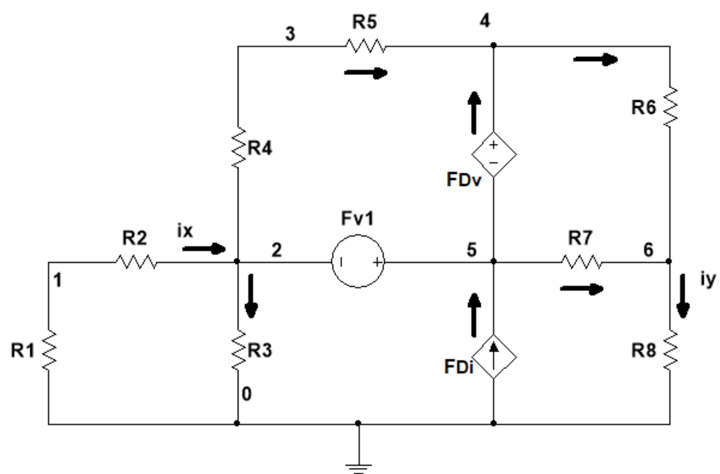

Figura 3

Reescribimos cada una de las variables presentes en el circuito las cuales se utilizarán en términos más generales dentro de la solución.

$$V_{FDv} = V_4 - V_5$$

$$V_{FDv} = 4I_x$$

LCK nodo $N_1 \sum i = 0$

$$I_{R1} - I_{R2} = 0$$

$$I_{R1} = \frac{-V_1}{R_1} \, ; \, I_{R2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2}$$

$$-\frac{1}{R_1}V_1 - \left(\frac{V_1 - V_2}{R_2}\right) = 0$$

$$\frac{3}{20}V_1 - \frac{1}{20}V_2 = 0 \tag{6}$$

LCK super nodo $\sum i = 0$

$$I_{R2} + I_{R5} + I_{FD} - I_{R4} - I_{R3} - I_{R6} - I_{R7} = 0$$

$$I_{R2} = \frac{V_1 - V_2}{R_2}\,;\, I_{R4} = \frac{V_2 - V_3}{R_4}\,;\, I_{R5} = \frac{V_3 - V_4}{R_5}\,;\, I_{FD} = 2I_Y$$

$$I_{R3} = \frac{V_2}{R_3}\,;\, I_{R6} = \frac{V_4 - V_6}{R_6}\,;\, I_{R7} = \frac{V_5 - V_6}{R_7}$$

$$\left(\frac{V_1 - V_2}{R_2}\right) + \left(\frac{V_3 - V_4}{R_5}\right) + 2I_Y - \left(\frac{V_2 - V_3}{R_4}\right) - \frac{V_2}{R_3} - \left(\frac{V_4 - V_6}{R_6}\right) - \left(\frac{V_5 - V_6}{R_7}\right) = 0$$

$$\frac{V_1}{R_2} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 + \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 - \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}\right)V_4 - \frac{V_5}{R_7} + \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}\right)V_6 + 2\left(\frac{V_1 - V_2}{R_2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{20}V_1 - \frac{17}{120}V_2 + \frac{9}{200}V_3 - \frac{11}{300}\left(\frac{4V_6}{30} + 1 + V_2\right) - \frac{1}{20}(1 + V_2) + \frac{1}{15}V_6 + \frac{2}{20}V_1 - \frac{2}{20}V_2 = 0$$

$$\frac{3}{20}V_1 - \frac{197}{600}V_2 + \frac{9}{200}V_3 + \frac{139}{2250}V_6 = \frac{13}{150} \tag{7}$$

LCK nodo $N_3 \sum i = 0$

$$I_{R4} = I_{R5}$$

$$I_{R4} = \frac{V_2 - V_3}{R_4}\,;\, I_{R5} = \frac{V_3 - V_4}{R_5}$$

$$\left(\frac{V_2 - V_3}{R_4}\right) = \left(\frac{V_3 - V_4}{R_5}\right)$$

$$\frac{1}{R_4}V_2 - \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)V_3 + \frac{1}{R_5}V_4 = 0$$

$$\frac{1}{40}V_2 - \frac{9}{200}V_3 + \frac{1}{50}\left(\frac{4V_6}{30} + 1 + V_2\right) = 0$$

$$\frac{9}{200}V_2 - \frac{9}{200}V_3 + \frac{1}{375}V_6 = -\frac{1}{50} \tag{8}$$

LCK nodo $N_6 \sum i = 0$

$$I_{R6} + I_{R7} - I_{R8} = 0$$

$$I_{R6} = \frac{V_4 - V_6}{R_6}\,;\, I_{R7} = \frac{V_5 - V_6}{R_7}\,;\, I_{R8} = \frac{V_6}{R_8}$$

$$\frac{V_4 - V_6}{R_6} + \frac{V_5 - V_6}{R_7} - \frac{V_6}{R_8} = 0$$

$$\frac{1}{R_6}V_4 + \frac{1}{R_7}V_5 - \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8}\right)V_6 = 0$$

$$\frac{1}{60}\left(\frac{4V_6}{30} + 1 + V_2\right) + \frac{1}{20}\left(1 + V_2\right) - \frac{1}{10}V_6 = 0$$

$$\frac{1}{15}V_2 - \frac{22}{225}V_6 = -\frac{1}{15} \tag{9}$$

Llegamos a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas el cual se presenta por las ecuaciones 6, 7, 8 y 9.

$$\frac{3}{20}V_1 - \frac{1}{20}V_2 = 0$$

$$\frac{3}{20}V_1 - \frac{197}{600}V_2 + \frac{9}{200}V_3 + \frac{139}{2250}V_6 = \frac{13}{150}$$

$$\frac{9}{200}V_2 - \frac{9}{200}V_3 + \frac{1}{375}V_6 = -\frac{1}{50}$$

$$\frac{1}{15}V_2 - \frac{22}{225}V_6 = -\frac{1}{15}$$

Generamos una matriz en la cual hallaremos los valores de voltaje para V_1,V_2,V_3yV_6.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 80 & \frac{9}{200} & \frac{139}{2250} \\ 0 & \frac{9}{200} & -\frac{9}{200} & \frac{1}{375} \\ 0 & \frac{1}{15} & 0 & -\frac{22}{225} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{13}{150} \\ -\frac{1}{50} \\ -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

$$V_1 = -40[mV]\,;\, V_2 = -120[mV]\,;\, V_3 = 360[mV]\,;\, V_6 = 600[mV]$$

Para hallar la resistencia Thévenin entre los terminales, es necesario conocer la corriente sobre la fuente de voltaje. Por lo cual se realiza un proceso para hallar dicho valor.

LCK nodo $N_1 \sum i = 0$

$$I_{R2} = I_{R4} + I_{R3} + I_f$$

$$I_f = I_{R2} - I_{R3} - I_{R4}$$

A partir de la diferencia de potencial entre cada una de los nodos hacemos el cálculo para obtener el valor de voltaje en las resistencias mencionadas.

Resistencia 2.

$$V_{R2} = V_1 - V_2$$

$$V_{R2} = -40\text{x}10^{-3} - \left(-120\text{x}10^{-3}\right)$$

$$V_{R2} = 80[mV]$$

Resistencia 3.

$$V_{R3} = V_2 - V_0$$

$$V_{R3} = \left(-120\text{x}10^{-3}\right) - 0$$

$$V_{R3} = -120[mV]$$

Resistencia 4.

$$V_{R4} = V_2 - V_3$$

$$V_{R4} = \left(-120\text{x}10^{-3}\right) - \left(360\text{x}10^{-3}\right)$$

$$V_{R4} = -480[mV]$$

Con los valores de voltaje obtenidos procedemos a hallar las corrientes de las resistencias para así obtenerte la corriente total por la fuente de voltaje.

Resistencia 2.

$$I_{R2} = \frac{V_{R2}}{R_2}$$

$$I_{R2} = \frac{80\text{x}10^{-3}}{20}$$

$$I_{R2} = 4[mA]$$

Resistencia 3.

$$I_{R3} = \frac{V_{R3}}{R_3}$$

$$I_{R3} = \frac{-120\text{x}10^{-3}}{15}$$

$$I_{R3} = -8[mA]$$

Resistencia 3.

$$I_{R4} = \frac{V_{R4}}{R_4}$$

$$I_{R4} = \frac{-480\text{x}10^{-3}}{40}$$

$$I_{R4} = -12[mA]$$

Sustituimos los valores en la siguiente ecuación

$$I_f = I_{R2} - I_{R3} - I_{R4}$$

$$I_f = 4\text{x}10^{-3} - \left(-8\text{x}10^{-3}\right) - \left(-12\text{x}10^{-3}\right)$$

$$I_f = 24[mA]$$

La resistencia Thévenin es igual a:

$$R_{Th} = \frac{V_f}{I_f}$$

$$R_{Th} = \frac{1}{24\text{x}10^{-3}}$$

$$R_{Th} = 41.66[\Omega]$$

Corriente Norton:

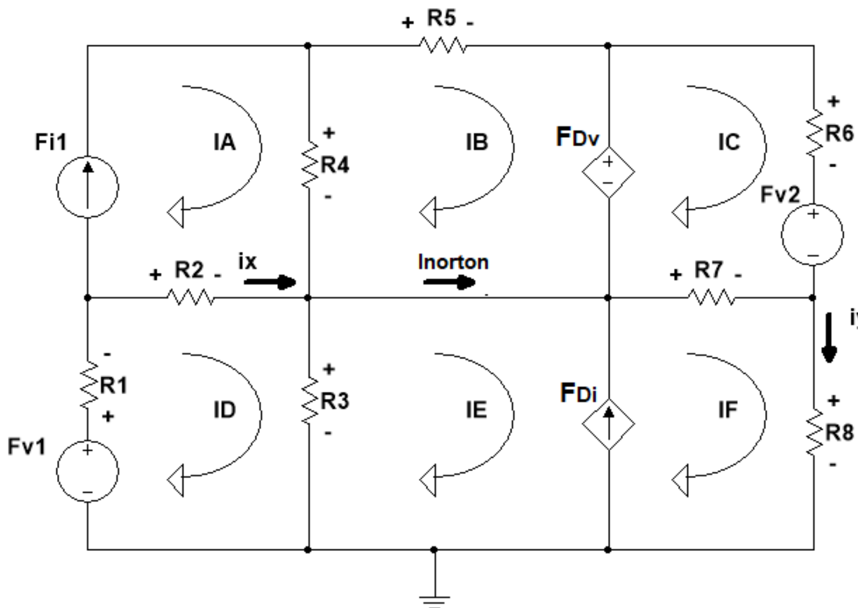

Figura 4

- Reescribimos cada una de las variables presentes en el circuito las cuales se pondrán utilizar en términos más generales dentro de la solución.

$$F_{Di} = 2I_y$$

$$F_{Di} = (I_F - I_E)$$

$$I_y = I_D - I_A$$

$$2\,(I_D - I_A) = (I_F - I_E)$$

$$I_E = I_F - 2\,(I_D - I_A) \tag{10}$$

-

$$F_{Dv} = 4I_x$$

$$I_x = I_F$$

$$F_{Dv} = 4I_F \tag{11}$$

LVK malla $I_B \sum V = 0$

$$-V_{R4} + V_{R5} + V_{FD} = 0$$

$$V_{R4} = (I_A - I_B)\,R_4\,;\, V_{R5} = I_B R_5\,;\, V_{FD} = 4I_F$$

$$-\left(I_A - I_B\right)R_4 + I_B R_5 + 4I_F = 0$$

$$-I_A R_4 + I_B(R_4 + R_5) + 4I_F = 0$$

$$90I_B + 4I_F = 80 \tag{12}$$

LVK malla $I_C \sum V = 0$

$$V_{R6} + V_{F2} - V_{FD} - V_{R7} = 0$$

$$V_{R6} = I_C R_6\,;\, V_{F2} = 60\,;\, V_{FD} = 4I_F R_6\,;\, V_{R7} = (I_F - I_C)\,R_7$$

$$I_C R_6 + 60 - 4I_F - (I_F - I_C)\,R_7 = 0$$

$$I_C\,(R_6 + R_7) - I_F\,(R_7 + 4) = -60$$

$$80I_C - 24I_F = -60 \tag{13}$$

LVK malla $I_D \sum V = 0$

$$-V_{F1} + V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = 0$$

$$V_{F1} = 80\,;\, V_{R1} = I_D R_1\,;\, V_{R2} = (I_D - I_A)\,R_2\,;\, V_{R3} = (I_D - I_E)\,R_3$$

$$-80 + I_D R_1 + (I_D - I_A)\,R_2 + (I_D - I_E)\,R_3 = 0$$

$$I_D\,(R_1 + R_2 + R_3) - (I_F - 2I_D + 2I_A)\,R_3 = 120$$

$$I_D\,(R_1 + R_2 + 3R_3) - I_F R_3 = 180$$

$$75I_D - 15I_F = 180 \tag{14}$$

LVK malla super malla $\sum V = 0$

$$V_{R7} + V_{R8} - V_{R3} = 0$$

$$V_{R7} = (I_F - I_C)\, R_7 \,;\, V_{R8} = I_F R_8 \,;\, V_{R3} = (I_D - I_E)\, R_3$$

$$(I_F - I_C)\, R_7 + I_F R_8 - (I_D - I_E)\, R_3 = 0$$

$$-I_C R_7 - I_D R_3 + (I_F - 2I_D + 2I_A)\, R_3 + I_F\,(R_7 + R_8) = 0$$

$$-20I_C - 45I_D + 65I_F = -60 \tag{15}$$

Llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas el cual consiste por las ecuaciones

$$90I_B + 4I_F = 80$$

$$80I_C - 24I_F = -60$$

$$75I_D - 15I_F = 180$$

$$-20I_C - 45I_D + 65I_F = -60$$

Generamos una matriz en la cual hallaremos los valores de corriente para I_B, I_C, I_D y I_F.

$$\begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 80 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 75 & -15 \\ 0 & -20 & -45 & 65 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} I_B \\ I_C \\ I_D \\ I_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ -60 \\ 180 \\ -60 \end{bmatrix}$$

$$I_B = 860[mA]\,;\, I_C = -552[mA]\,; I_D = 2532[mA] I_F = 660[mA]$$

Para la malla I_E realizamos el remplazo de la ecuación.

$$I_E = I_F - 2\,(I_D - I_A)$$

$$I_E = 660\text{x}10^{-3} - 2\left(2532\text{x}10^{-3} - 2\right)$$

$$I_E = -404[mA]$$

La corriente Norton estará expresada por la siguiente ecuación.

$$I_{Nor} = I_B - I_E$$

$$I_{Nor} = 860\text{x}10^{-3} - \left(-404\text{x}10^{-3}\right)$$

$$I_{Nor} = 1.264[A]$$

Voltaje Thevenin:

Recordando el análisis nodal para el mismo ejercicio, podremos establecer el voltaje Thévenin entre estos puntos.

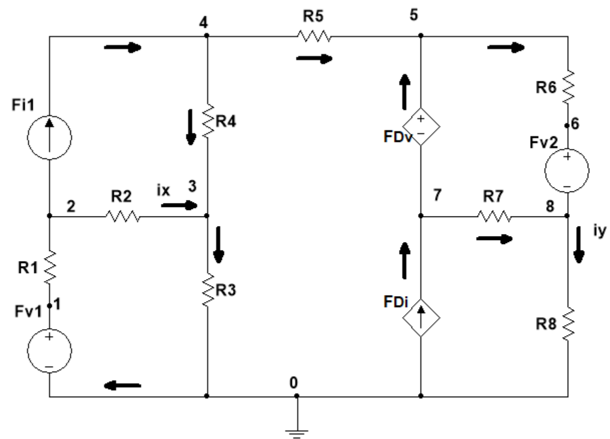

Figura 5

Establecemos el sistema de ecuaciones que se obtuvo durante el análisis.

$$-\frac{3}{20}V_2 + \frac{1}{20}V_3 = -6$$

$$\frac{1}{20}V_2 - \frac{17}{120}V_3 + \frac{1}{40}V_4 = 0$$

$$-\frac{1}{40}V_3 + \frac{9}{200}V_4 - \frac{1}{50}V_5 = 2$$

$$\frac{1}{15}V_5 - \frac{8}{75}V_8 = 1$$

$$\frac{2}{20}V_2 - \frac{2}{20}V_3 + \frac{1}{50}V_4 - \frac{13}{150}V_5 + \frac{11}{150}V_8 = -1$$

Generamos una matriz en la cual hallaremos los valores de voltaje para V_2,V_3,V_4,V_5,yV_8.

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{20} & -\frac{17}{120} & \frac{1}{40} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{40} & \frac{9}{200} & -\frac{1}{50} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & -\frac{8}{75} \\ \frac{2}{20} & -\frac{2}{20} & \frac{1}{50} & -\frac{13}{150} & \frac{11}{150} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = 52.574[V]\,;\ V_3 = 37.72[V]\,;\ V_4 = 108.6[V]\,;\ V_5 = 97.2[V]\,;\ V_8 = 51.389[V]$$

Para hallar el voltaje Thévenin debemos hallar la diferencia de potencial ente los nodos 3 y 7.

Hallaremos el voltaje del nodo 7, con la siguiente expresión.

$$V_{R7} = V_7 - V_8$$

$$V_7 = V_{R7} + V_8$$

Hallamos las corrientes para así logar definir el voltaje sobre R7

$$V_6 = 60 + V_8$$

$$V_6 = 60 + 51.389$$

$$V_6 = 111.389[V]$$

Resistencia 6.

$$V_{R6} = V_5 - V_6$$

$$V_{R6} = 97.2 - 111.389$$

$$V_{R6} = -14.18[V]$$

$$I_{R6} = \frac{-14.18}{R_6}$$

$$I_{R6} = \frac{-14.89}{60}$$

$$I_{R6} = -236[mA]$$

Resistencia 8.

$$I_{R8} = \frac{V_8}{R_8}$$

$$I_{R8} = \frac{51.389}{30}$$

$$I_{R8} = 1.71[A]$$

LCK nodo $N_8 \sum i = 0$

$$I_{R6} + I_{R7} - I_{R8} = 0$$

$$I_{R7} = I_{R8} - I_{R6}$$

$$I_{R7} = 1.71 - (-0.236)$$

$$I_{R7} = 1.95[A]$$

Sustituimos los valores en la siguiente ecuación

$$V_{R7} = I_{R7} R_7$$

$$V_{R7} = 1.95 \cdot 20$$
$$V_{R7} = 39[V]$$

$$V_7 = V_{R7} + V_8$$

$$V_7 = 39 + 51.389$$

$$V_7 = 90.389$$

El voltaje Thévenin es igual a:

$$V_{Th} = V_7 - V_3$$

$$V_{Th} = 90.389 - 37.72$$

$$V_{Th} = 52.66[V]$$

La resistencia Thévenin es igual a:

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{Nor}}$$

$$R_{Th} = \frac{52.66}{1.264}$$

$$R_{Th} = 41.66[\Omega]$$

Identificación de resultados entre el cos dos fuentes una de voltaje y de corriente, y a su vez por el principio de corriente Norton y voltaje Thévenin.

Análisis	Fuente de corriente	Fuente de voltaje	I-Norton V-Thévenin
Resistencia Thévenin	$Resistencia[\Omega]$	$Resistencia[\Omega]$	$Resistencia[\Omega]$
R_{Th}	41.7	41.66	41.66

Tabla 1