

Ejercicio 2, condensador

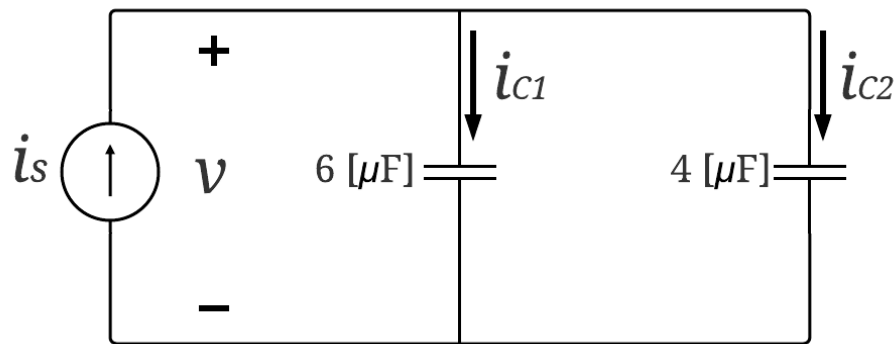


Figura 1

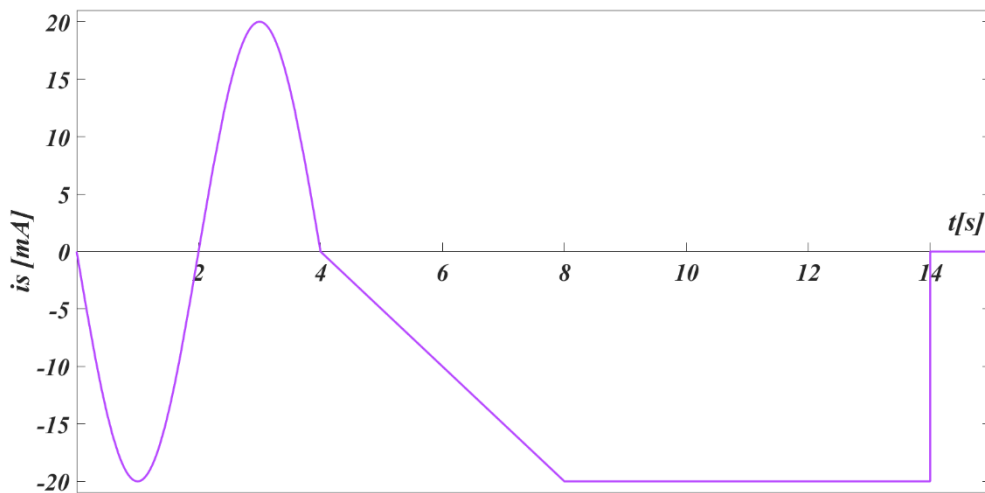


Figura 2

Dado el circuito de la Figura 1, encontrar el voltaje de los condensadores y la corriente que pasa por cada uno de ellos, a su vez, encontrar potencia que consume cada condensador si tenemos la señal de corriente de la Figura 2.

Solución:

Procedemos a encontrar la ecuación de la fuente de corriente en cada intervalo.

Para el intervalo, $0 \leq t < 4\ \text{s}$

Para este intervalo, debemos hallar la frecuencia angular, pero para ello, debemos encontrar el periodo de esta subfunción.

$$T = 4\ \text{s}$$

Por ende:

$$\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ [rad/s]}$$

Y se sabe que la amplitud es de 20 [V] y siguiendo la secuencia, tenemos que es una función $-\sin(\omega t)$, se tiene que:

$$i_s = -20 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $4 \leq t < 8 \text{ [s]}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow \frac{(-20 - 0)[A]}{(8 - 4)[s]} = \frac{-20}{4}$$

$$m = -5 \text{ [A/s]}$$

Ahora hallamos la intersección en el eje y de esta rampa, tenemos que:

$$y = mx + b$$

Evalutando en el intervalo inicial o final, nos debe arrojar el mismo resultado

$$0 = -5(4) + b \rightarrow b = 20$$

$$-20 = -5(8) + b \rightarrow b = -20 + 40 = 20$$

Completando nuestra ecuación, obtenemos

$$i_s = -5t + 20 \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $8 \leq t < 14 \text{ [s]}$

Para este caso no hay pendiente pronunciada, simplemente una constante, cuyo valor es de -20 [A]

$$i_s = -20 \text{ [mA]}$$

Organizando;

$$i_s = \begin{cases} -20 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]} & 0 \leq t < 4 \text{ [s]} \\ -5t + 20 \text{ [mA]} & 4 \leq t < 8 \text{ [s]} \\ -20 \text{ [mA]} & 8 \leq t < 14 \text{ [s]} \end{cases}$$

Se reduce el circuito

$$C_{eq} = 4 + 6 = 10 \text{ [\mu F]}$$

$$v = \frac{1}{C_{eq}} \int_0^T i \, dt + v(0)$$

No se tiene carga inicial, entonces

Para el intervalo, $0 \leq t < 4 \text{ [s]}$

$$v = \frac{10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} \int -20 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt + 0$$

$$v = 100 \cdot \left(\frac{40}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) + 0 \text{ [V]}$$

$$v = \frac{4000}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [V]} = 1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [V]}$$

$$v = 1.27324 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [kV]}$$

Para el intervalo $4 \leq t < 8 \text{ [s]}$

$$v = \frac{10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} \int -5t + 20 dt + v(0)$$

$$v = 100 \cdot \left(-\frac{5}{2}t^2 + 20t\right) + v(0) \text{ [V]}$$

$$v = -\frac{500}{2}t^2 + 2000t + v(0) \text{ [V]}$$

$$v = -0.25t^2 + 2t + v(0) \text{ [kV]}$$

Para hallar el valor de $v(0)$, igualamos y reemplazamos en el intervalo similar, luego despejamos $v(0)$, entonces:

$$1.27324 \cos\left(\frac{\pi}{2}(4)\right) \text{ [kV]} = -0.25(4)^2 + 2(4) + v(0) \text{ [kV]}$$

$$(1.27324 + 4 - 8) \text{ [kV]} = v(0)$$

$$v(0) = -2.72676 \text{ [kV]}$$

Completando nuestra función, tenemos

$$v = -0.25t^2 + 2t - 2.72676 \text{ [kV]}$$

Para el intervalo $8 \leq t < 14 \text{ [s]}$

$$v = 100 \int -20 dt$$

$$v = -2t + v1(0) \text{ [kV]}$$

Para hallar el valor de $v1(0)$, realizamos el mismo procedimiento que el intervalo anterior, entonces tenemos lo siguiente:

$$-0.25(8)^2 + 2(8) - 2.72676 \text{ [kV]} = -2(8) + v1(0) \text{ [kV]}$$

$$(-16 + 16 - 2.72676 + 16) \text{ [kV]} = v1(0)$$

$$v1(0) = 13.27324 \text{ [kV]}$$

Reescribiendo la ecuación, nos queda lo siguiente:

$$v = -2t + 13.27324 \text{ [kV]}$$

$$v = \begin{cases} 1.27324 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [kV]} & 0 \leq t < 4 \text{ [s]} \\ -0.25t^2 + 2t - 2.72676 \text{ [kV]} & 4 \leq t < 8 \text{ [s]} \\ -2t + 13.27324 \text{ [kV]} & 8 \leq t < 14 \text{ [s]} \end{cases}$$

Con los resultados obtenidos, podemos ver el comportamiento del voltaje, así como se muestra en la Figura 3.

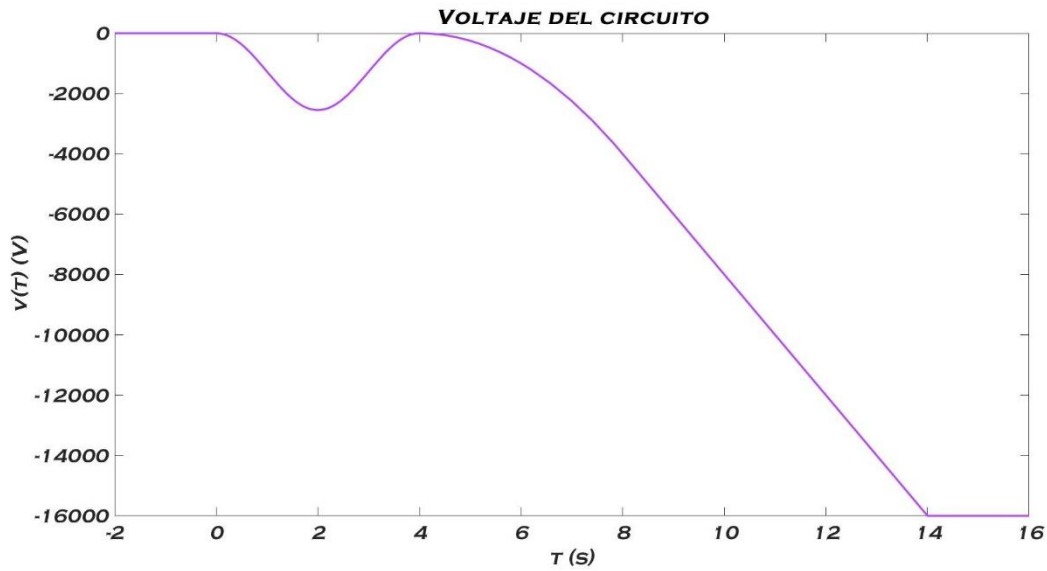


Figura 3

Ahora procedemos a encontrar los valores de las corrientes que pasan por los condensadores, entonces tenemos que:

$$i_{C1} = C_1 \frac{dv}{dt} = 6 \times 10^{-6} \frac{dv}{dt}$$

Para el intervalo, $0 \leq t < 4 \text{ [s]}$

$$i_{C1} = 6 \times 10^{-6} \frac{d\left[1273,24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]}{dt}$$

$$i_{C1} = 12 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $4 \leq t < 8 \text{ [s]}$

$$i_{C1} = 6 \times 10^{-6} \frac{d[-250t^2 + 2000t - 2726.76]}{dt}$$

$$i_{C1} = -3t + 12 \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $8 \leq t < 14 \text{ [s]}$

$$i_{C1} = 6 \times 10^{-6} \frac{d[-2000t + 13273.24]}{dt}$$

$$i_{C1} = -12 \text{ [mA]}$$

$$i_{C1} = \begin{cases} -12 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]} & 0 \leq t < 1 \text{ [s]} \\ -3t + 12 \text{ [mA]} & 1 \leq t < 3 \text{ [s]} \\ -12 \text{ [mA]} & 3 \leq t < 5 \text{ [s]} \end{cases}$$

Ahora visualizamos el comportamiento de la corriente del condensador 1, así como se ve en la Figura 4.

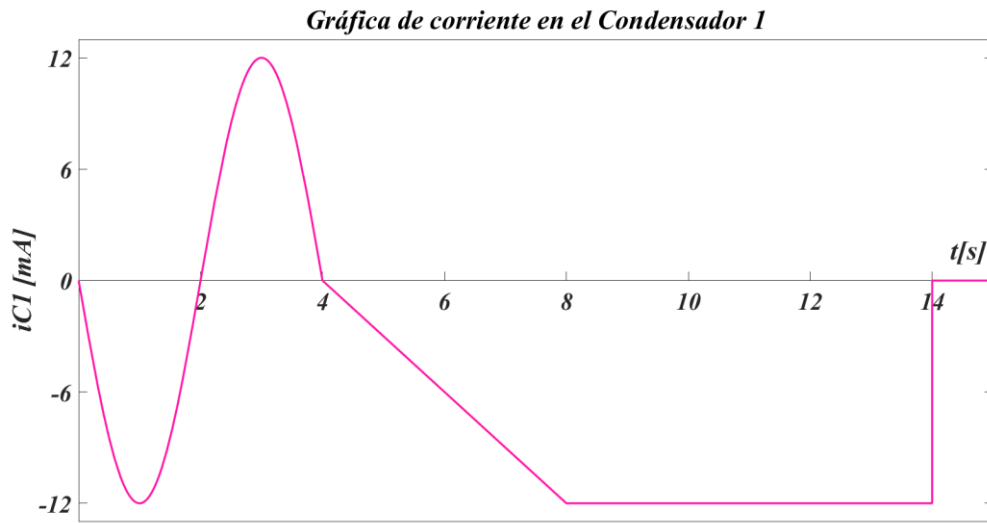


Figura 4

$$i_{C2} = C_2 \frac{dv}{dt} = 4 \times 10^{-6} \frac{dv}{dt}$$

Para el intervalo, $0 \leq t < 4 \text{ [s]}$

$$i_{C2} = 4 \times 10^{-6} \frac{d\left[1273,24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]}{dt}$$

$$i_{C2} = -8 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $4 \leq t < 8 \text{ [s]}$

$$i_{C2} = 4 \times 10^{-6} \frac{d[-250t^2 + 2000t - 2726.76]}{dt}$$

$$i_{C2} = -2t + 8 \text{ [mA]}$$

Para el intervalo, $8 \leq t < 14 \text{ [s]}$

$$i_{C2} = 4 \times 10^{-6} \frac{d[-2000t + 13273.24]}{dt}$$

$$i_{C2} = -8 \text{ [mA]}$$

$$i_{C2} = \begin{cases} -8 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \text{ [mA]} & 0 \leq t < 1 \text{ [s]} \\ -2t + 8 \text{ [mA]} & 1 \leq t < 3 \text{ [s]} \\ -8 \text{ [mA]} & 3 \leq t < 5 \text{ [s]} \end{cases}$$

Ahora visualizamos el comportamiento de la corriente en el condensador dos, así como se refleja en la Figura 5.

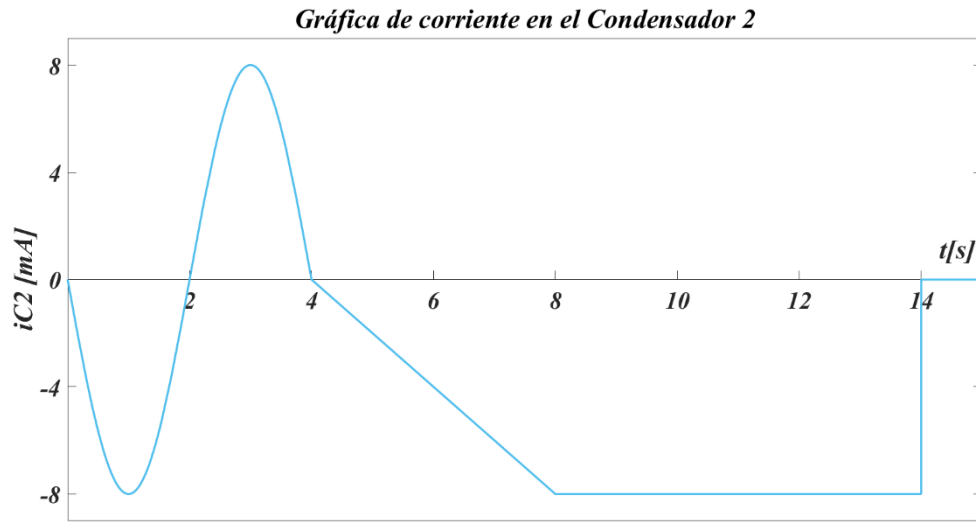


Figura 5

Potencia

Para hallar potencia, utilizaremos la siguiente ecuación

$$P_C = C \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}$$

Con base a esa ecuación, la aplicamos para cada condensador, entonces tenemos que:

Para el intervalo, $0 \leq t < 4 \text{ [s]}$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6}) \left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \cdot \frac{d\left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{dt}$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6}) \left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right) \cdot -2000 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$P_{C1} = -15.2789 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) [\text{W}]$$

Para el intervalo, $4 \leq t < 8$ [s]

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6}) \cdot (-250t^2 + 2000t - 2726.76) \cdot \frac{d(-250t^2 + 2000t - 2726.76)}{dt}$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6}) \cdot (-250t^2 + 2000t - 2726.76) \cdot (-500t + 2000)$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6})(125000t^3 - 1000000t^2 + 1363380t - 500000t^2 + 4000000t - 5453520)$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6})(125000t^3 - 1500000t^2 + 5363380t - 5453520)$$

$$P_{C1} = 0.75t^3 - 9t^2 + 32.18t - 32.72 [\text{W}]$$

Para el intervalo, $8 \leq t < 14$ [s]

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6})(-2000t + 13273.24) \cdot \left(\frac{d(-2000t + 13273.24)}{dt} \right)$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6})(-2000t + 13273.24) \cdot (-2000)$$

$$P_{C1} = (6 \times 10^{-6})(4000000t - 26546480)$$

$$P_{C1} = 24t - 159.28 [\text{W}]$$

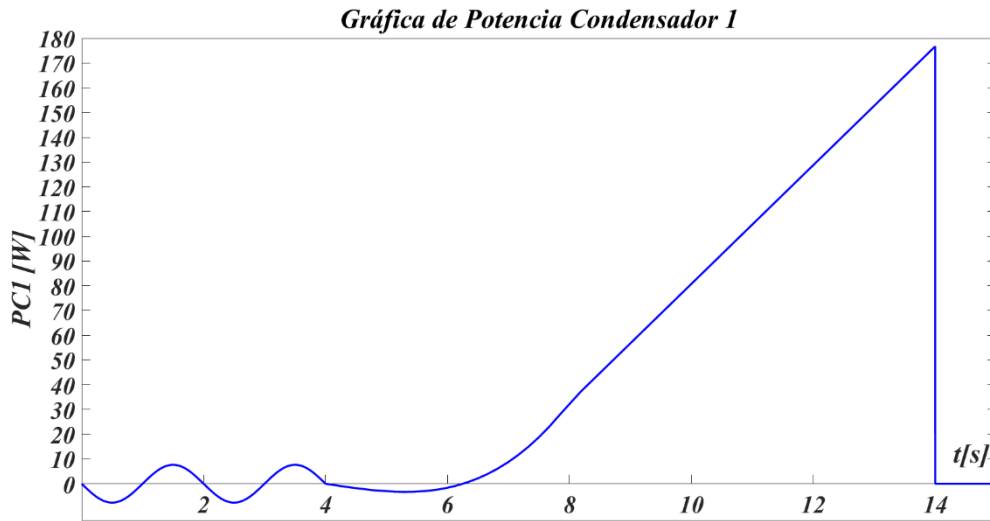


Figura 6

Para el condensador 2

Para el intervalo, $0 \leq t < 4$ [s]

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6}) \left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \cdot \frac{d\left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)}{dt}$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6}) \left(1273.24 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \cdot -2000 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

$$P_{C2} = -10.186 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right) \text{ [W]}$$

Para el intervalo, $4 \leq t < 8$ [s]

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6}) \cdot (-250t^2 + 2000t - 2726.76) \cdot \frac{d(-250t^2 + 2000t - 2726.76)}{dt}$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6}) \cdot (-250t^2 + 2000t - 2726.76) \cdot (-500t + 2000)$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6})(125000t^3 - 1000000t^2 + 1363380t - 500000t^2 + 4000000t - 5453520)$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6})(125000t^3 - 1500000t^2 + 5363380t - 5453520)$$

$$P_{C2} = 0.5t^3 - 6t^2 + 21.453t - 21.814 \text{ [W]}$$

Para el intervalo, $8 \leq t < 14$ [s]

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6})(-2000t + 13273.24) \cdot \left(\frac{d(-2000t + 13273.24)}{dt} \right)$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6})(-2000t + 13273.24) \cdot (-2000)$$

$$P_{C2} = (4 \times 10^{-6})(4000000t - 26546480)$$

$$P_{C2} = 16t - 106.186 \text{ [W]}$$

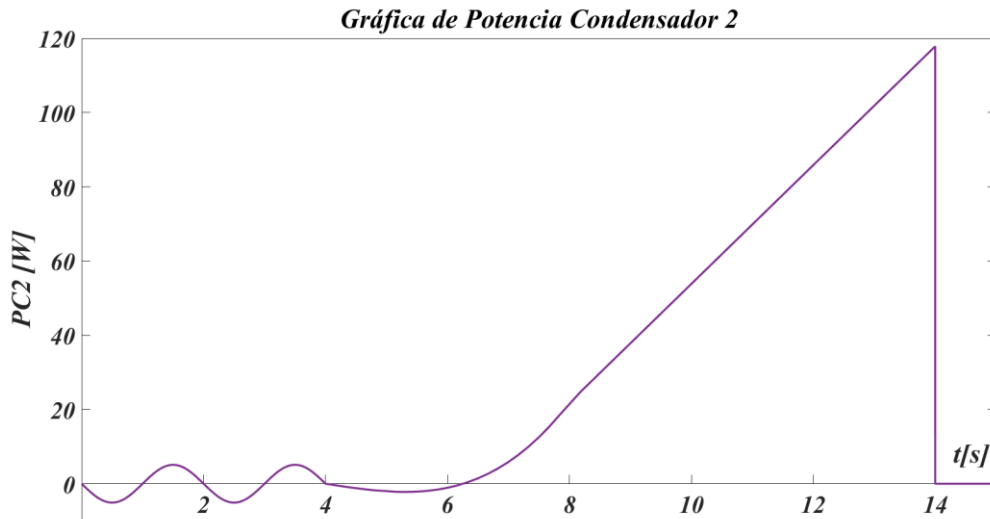


Figura 7