Ejercicio 3

Para el circuito mostrado en la siguiente Figura 1, se pide encontrar las variables descritas en el mismo, en donde se debe utilizar las diversas técnicas solución.

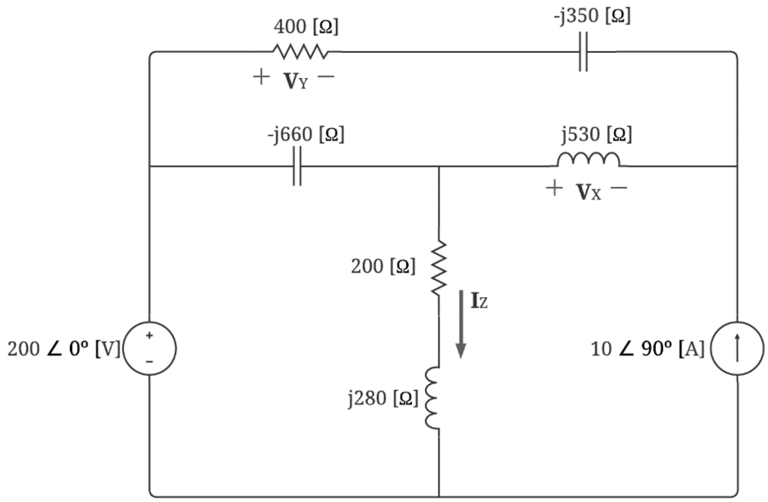

Figura 1

a) *Análisis por tensiones de nodo*

Definimos las impedancias equivalentes, entonces:

$$\mathbf{Z}_1 = 400 - j350\ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_2 = -j660\ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_3 = j530\ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_4 = 200 + j280\ [\Omega]$$

Usando una ley de Kirchhoff para corriente, se tiene lo siguiente:

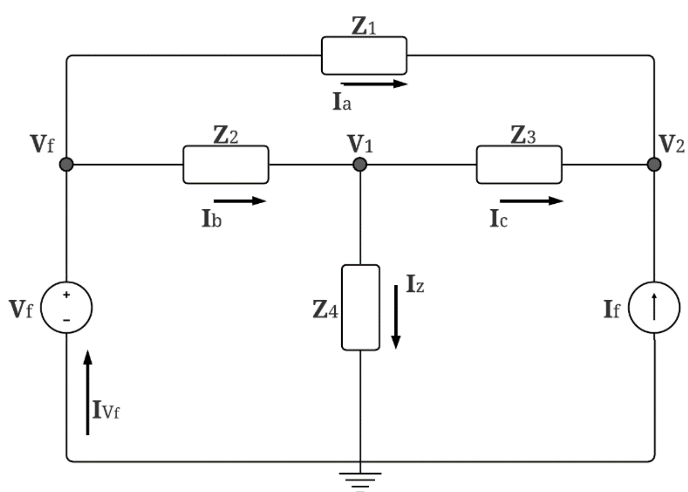

Figura 2

Teniendo definidas las direcciones de las corrientes y definidos los nodos, tenemos lo siguiente:

Nodo $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_c + \mathbf{I}_z$$

$$\left(\frac{\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_2}\right) = \left(\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_3}\right) + \left(\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_4}\right)$$

$$\left(\frac{\mathbf{V}_f}{\mathbf{Z}_2}\right) = \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_4} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3} + \frac{1}{\mathbf{Z}_2}\right)\mathbf{V}_1 - \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right)\mathbf{V}_2 \quad (E1)$$

Nodo $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_c + \mathbf{I}_f = 0$$

$$\left(\frac{\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_1}\right) + \left(\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_3}\right) + \mathbf{I}_f = 0$$

$$\mathbf{I}_f + \left(\frac{\mathbf{V}_f}{\mathbf{Z}_1}\right) = \left(-\frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right)\mathbf{V}_1 + \left(\frac{1}{\mathbf{Z}_1} + \frac{1}{\mathbf{Z}_3}\right)\mathbf{V}_2 \quad (E2)$$

Se tiene un sistema de ecuaciones de dos incógnitas con dos ecuaciones, resolviendo este sistema, se tiene que:

$$\mathbf{V}_1 = 3008.33 \angle 49.6279° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{V}_2 = 5154.13 \angle 79.5489° \text{ [V]}$$

Teniendo estos valores, procedemos a encontrar las variables que nos preguntan:

$$\mathbf{I}_a = \frac{\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_1}$$

$$\mathbf{I}_a = \frac{200 \angle 0° - 5154.13 \angle 79.5489°}{400 - j350}$$

$$\mathbf{I}_a = 9.63605 \angle -57.0643° \text{ [A]}$$

$$\mathbf{V}_Y = \mathbf{I}_a \cdot 400$$

$$\mathbf{V}_Y = 3854.42 \angle -57.0643° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$$

$$\mathbf{V}_x = 3008.33 \angle 49.6279° - 5154.13 \angle 79.5489°$$

$$\mathbf{V}_x = 2955.97 \angle -69.9442° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{I}_z = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_4}$$

$$\mathbf{I}_z = \frac{3008.33 \angle 49.6279°}{200 + j280}$$

$$\mathbf{I}_z = 8.74278 \angle -4.83442° \ \ [\mathrm{A}]$$

b) *Análisis por corriente de malla*

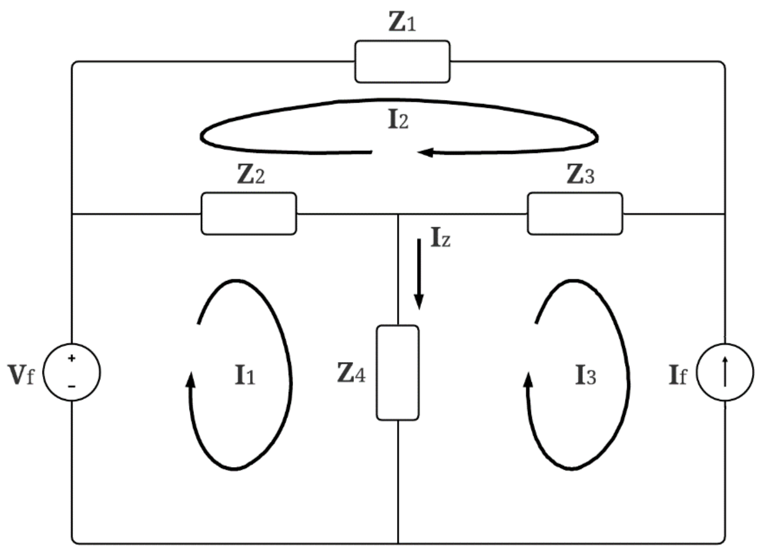

Figura 3

Teniendo en claro que:

$$\mathbf{Z}_1 = 400 - j350 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_2 = -j660 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_3 = j530 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_4 = 200 + j280 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_f$$

Usando la ley de Kirchhoff para voltajes, se tiene que:

Malla 1:

$$-\mathbf{V}_f + \mathbf{V}_{Z2} + \mathbf{V}_{Z4} = 0$$

$$(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\mathbf{Z}_2 + (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3)\mathbf{Z}_4 = \mathbf{V}_f$$

$$(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2)\mathbf{Z}_2 + (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_f)\mathbf{Z}_4 = \mathbf{V}_f$$

$$(\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4)\mathbf{I}_1 - \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_2 = \mathbf{V}_f - \mathbf{I}_f\mathbf{Z}_4 \quad (E1)$$

Malla 2:

$$\mathbf{V}_{Z1} + \mathbf{V}_{Z3} + \mathbf{V}_{Z2} = 0$$

$$\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_1 + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3)\mathbf{Z}_3 + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)\mathbf{Z}_2 = 0$$

$$\mathbf{I}_2\mathbf{Z}_1 + \left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_f\right)\mathbf{Z}_3 + (\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)\mathbf{Z}_2 = 0$$

$$(-\mathbf{Z}_2)\mathbf{I}_1 + (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2)\,\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_f\mathbf{Z}_3 \quad (E2)$$

Se tiene un sistema de ecuaciones de dos incógnitas con dos ecuaciones, resolviendo este sistema, se tiene que:

$$\mathbf{I}_1 = 13.8265\angle -50.9447° \text{ [A]}$$

$$\mathbf{I}_2 = 9.63604\angle -57.0643° \text{ [A]}$$

Encontramos las variables de nuestro interés:

$$\mathbf{V}_Y = \mathbf{I}_2 \cdot 400$$

$$\mathbf{V}_Y = 3854.42\angle -57.0643° \text{ [V]}$$

$$-\mathbf{V}_{Z3} = \mathbf{V}_x$$

$$\mathbf{V}_{Z3} = \left(\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_f\right)\mathbf{Z}_3$$

$$\mathbf{V}_{Z3} = (9.63604\angle -57.0643° + 10\angle 90°) \cdot j530$$

$$\mathbf{V}_{Z3} = 2955.97\angle 110.056° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{V}_x = 2955.97\angle -69.9442° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_F$$

$$\mathbf{I}_Z = 13.8265\angle -50.9447° + 10\angle 90°$$

$$\mathbf{I}_Z = 8.74277\angle -4.83439° \text{ [A]}$$

c) Método de superposición

Activando $\mathbf{V}_f$ y desactivando $\mathbf{I}_f$

En primer lugar, simplificamos el circuito poco a poco, como se evidencia en la Figura 4, hasta llegar a un circuito equivalente para poder así encontrar el valor de nuestra corriente $\mathbf{I}_Z$, así como se ve en la Figura 5.

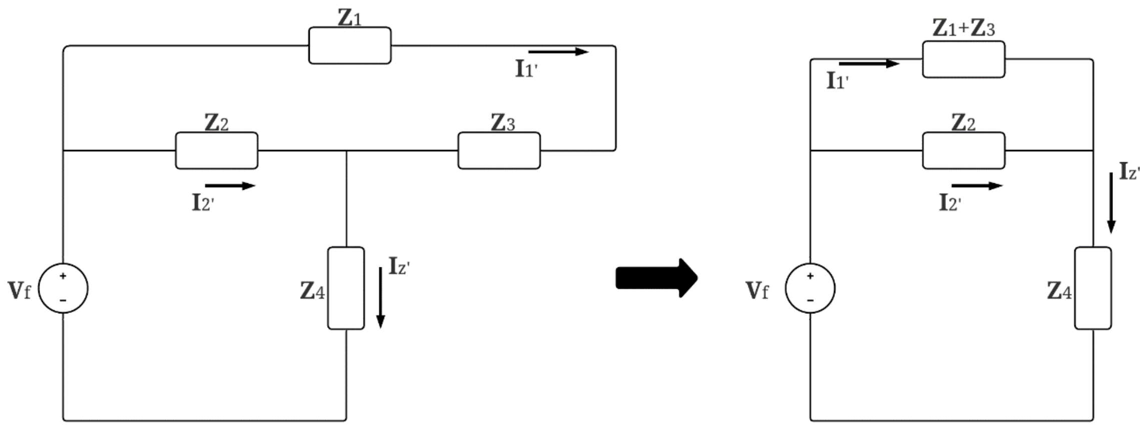

Figura 4

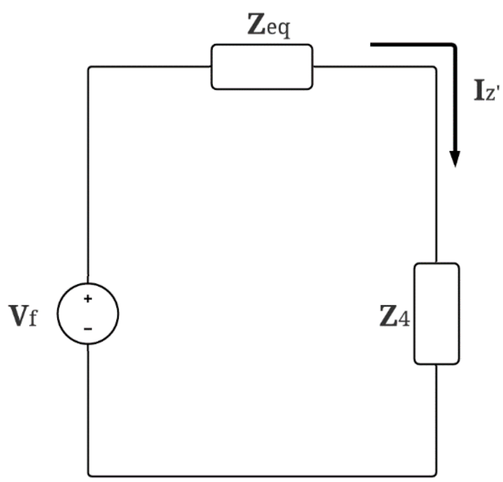

Figura 5

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3) \cdot \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 446.311 - j124.426 \ [\Omega]$$

Aplicando un divisor de voltaje:

$$\mathbf{V}'_{Z4} = \mathbf{V}_f \cdot \frac{\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_4} \ = 103.522 \angle 40.9281° \ \ [\text{V}]$$

$$\mathbf{V}'_{eq} = \mathbf{V}_f \cdot \frac{\mathbf{Z}_{eq}}{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_4} \ = 139.396 \angle -29.112° \ \ [\text{V}]$$

$$\mathbf{I}'_Z = \frac{\mathbf{V}'_{Z4}}{\mathbf{Z}_4} = \frac{\mathbf{V}'_{eq}}{\mathbf{Z}_{eq}} = 0.300855 \angle -13.5342 \ \ [\text{A}]$$

Ahora retrocedemos y encontramos datos que necesitamos:

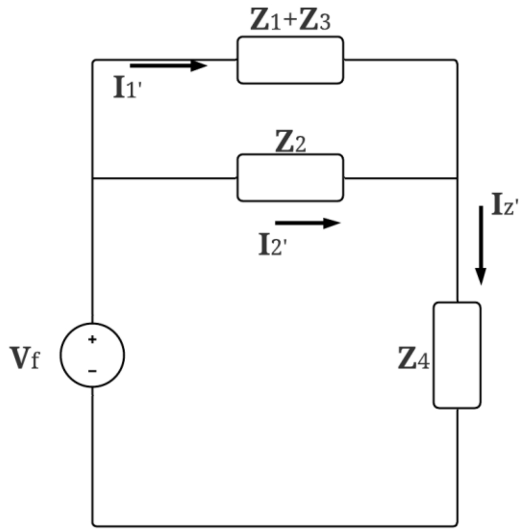

Figura 6

$$\mathbf{I}_1' = \frac{\mathbf{V}_{eq}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} = 0.317796\angle -53.3397^\circ\ [\text{A}]$$

$$\mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{V}_{eq}}{\mathbf{Z}_2} = 0.211206\angle 60.888^\circ\ [\text{A}]$$

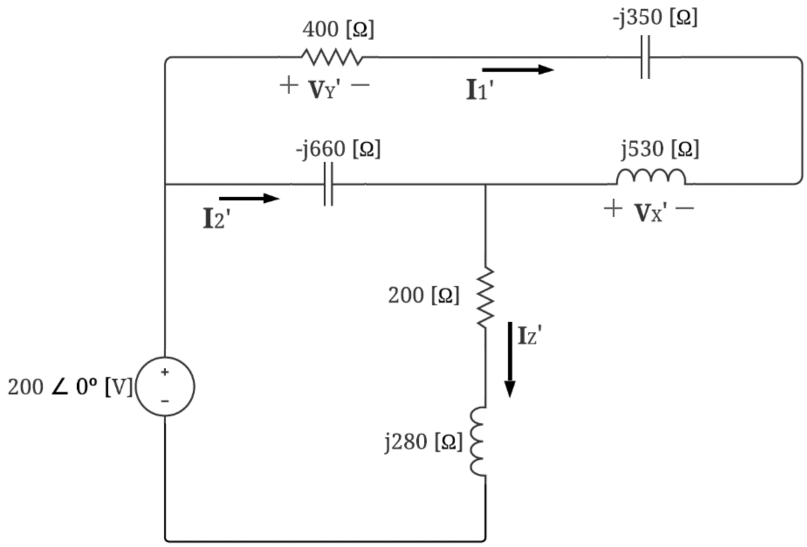

Figura 7

$$\mathbf{V}_Y' = \mathbf{I}_1' \cdot 400 = 127.118\angle -53.3397^\circ\ [\text{V}]$$

$$\mathbf{V}_X' = \mathbf{I}_1' \cdot j530 = 168.432\angle 36.6603^\circ\ [\text{V}]$$

Activando $\mathbf{I}_f$ y desactivando $\mathbf{V}_f$

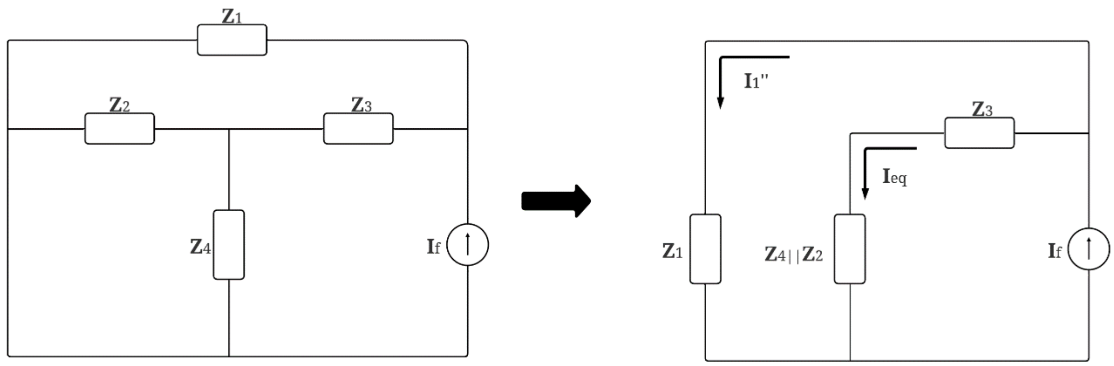

Figura 8

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_2||\mathbf{Z}_3 = \frac{\mathbf{Z}_2 \cdot \mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_4}$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = 472.451 + j237.657 \ [\Omega]$$

Por divisores de corrientes:

$$\mathbf{I}_{eq} = \mathbf{I}_f \cdot \frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{I}_{eq} = 5.49493 \angle 23.2329° \ [\mathrm{A}]$$

$$\mathbf{I}_1'' = \mathbf{I}_f \cdot \frac{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_{eq} + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}$$

$$\mathbf{I}_1'' = 9.31894 \angle 122.809° \ [\mathrm{A}]$$

$$\mathbf{V}''_{Z3} = \mathbf{V}''_X = \mathbf{I}_{eq} \cdot \mathbf{Z}_3$$

$$\mathbf{V}''_X = 2912.31 \angle 113.233° \ [\mathrm{V}]$$

$$\mathbf{V}''_Y = \mathbf{I}_1'' \cdot 400$$

$$\mathbf{V}''_Y = 3727.58 \angle 122.809° \ [\mathrm{V}]$$

$$\mathbf{V}_{eq} = \mathbf{I}_{eq} \cdot \mathbf{Z}_{eq}$$

$$\mathbf{V}_{eq} = 2906.04 \angle 49.9367° \ [\mathrm{V}]$$

$$\mathbf{I}''_Z = \frac{\mathbf{V}_{eq}}{\mathbf{Z}_4}$$

$$\mathbf{I}''_Z = 8.4455 \angle -4.52566° \ [\mathrm{A}]$$

Teniendo estos datos, procedemos a sumar los aportes de cada fuente, entonces:

$$\mathbf{V}_Y = \mathbf{V}'_Y - \mathbf{V}''_Y$$

$$\mathbf{V}_Y = (127.118 \angle -53.3397°) - (3727.58 \angle 122.809°)$$

$$\mathbf{V}_Y = 3854.42 \angle -57.0641° \ [\mathrm{V}]$$

$$\mathbf{V}_X = \mathbf{V}'_X - \mathbf{V}''_X$$

$$\mathbf{V}_X = (168.432 \angle 36.6603°) + (2912.31 \angle 113.233°) \cdot (-1)$$

$$\mathbf{V}_X = 2955.97 \angle -69.9441° \ [\mathrm{V}]$$

$$\mathbf{I}_Z = \mathbf{I}'_Z - \mathbf{I}''_Z$$

$$\mathbf{I}_Z = (0.300855 \angle -13.5342 \ ) + (8.4455 \angle -4.52566° \ )$$

$$\mathbf{I}_Z = 8.74277 \angle -4.83439° \ [\mathrm{A}]$$

d) *Teorema Thévenin*

En primer lugar, encontraremos la $\mathbf{Z}_{Th}$ visto desde los terminales a y b, como es el caso en que las ambas fuentes son independientes, para la fuente de voltaje se reemplaza por un cortocircuito (voltaje cero), y para el caso de la fuente de corriente, con circuito abierto (corriente cero).

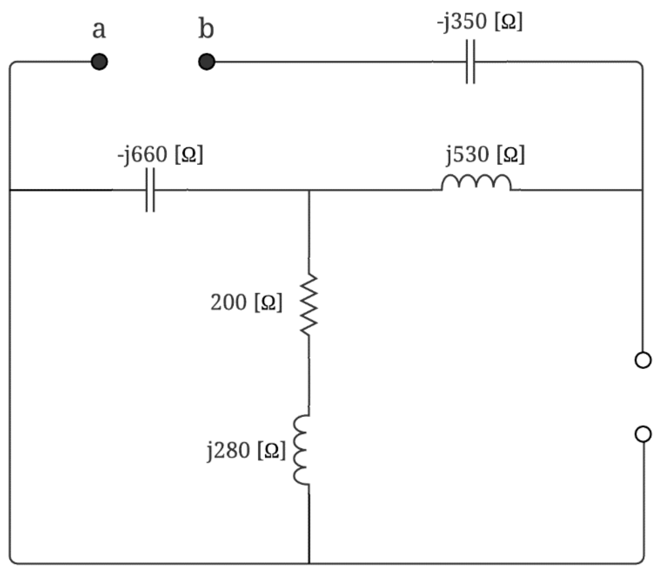

Figura 9

$$\mathbf{Z}_a = j530 - j350 = j180 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_b = -j660 \ || 200 + j280 \ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_b = \frac{(-j660)(200+j280)}{(-j660)+(200+j280)}$$

$$\mathbf{Z}_b = 472.451 + j237.657\ [\Omega]$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = \mathbf{Z}_a + \mathbf{Z}_b$$

$$\mathbf{Z}_{Th} = 472.451 + j417.657\ [\Omega]$$

Teniendo nuestra $\mathbf{Z}_{Th}$, ahora se procede a encontrar el valor de $\mathbf{V}_{Th}$, para este caso, aplicaremos la técnica de tensiones nodales para encontrar dicho valor, entonces tenemos que:

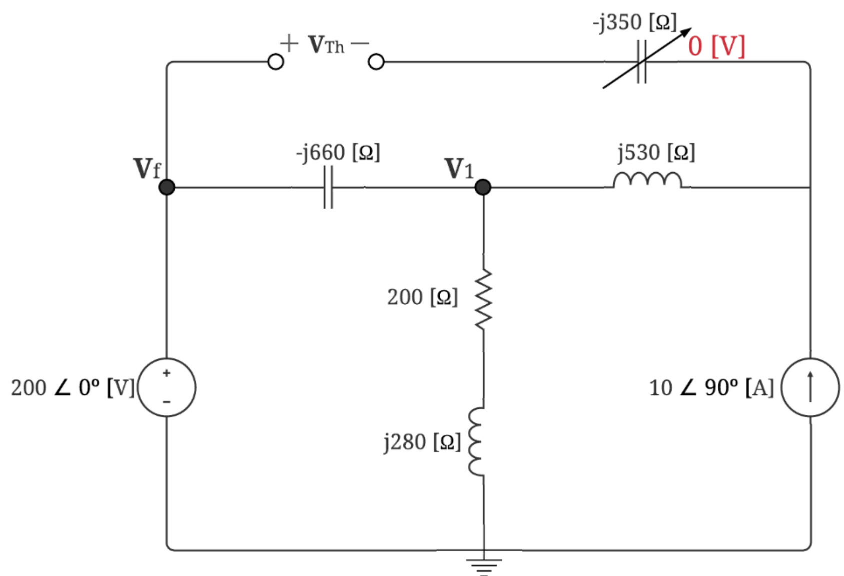

Figura 10

Se sabe que

$$\mathbf{V}_x = -\mathbf{I}_f \cdot j530 = 5300\ [\text{V}]$$

Nodo $\mathbf{V}_b$

Si se toma todas las corrientes saliendo

$$\frac{\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_f}{-j660} + \frac{\mathbf{V}_b}{200+j280} - (10\angle 90°) = 0$$

$$\mathbf{V}_b\left(\frac{1}{-j660} + \frac{1}{200+j280}\right) = (10\angle 90°) - \frac{\mathbf{V}_f}{j660}$$

$$\mathbf{V}_b = \frac{(10\angle 90°) - \frac{\mathbf{V}_f}{j660}}{\left(\frac{1}{-j660} + \frac{1}{200+j280}\right)}$$

$$\mathbf{V}_b = 5448.84 \angle 116.704°\ [\text{V}]$$

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f - \mathbf{V}_b = 5541.6 \angle -61.4486° \text{ [V]}$$

$$\mathbf{V}_{Th} = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_x$$

$$\mathbf{V}_{Th} = 9320.64 \angle -31.4831° \text{ [V]}$$

Teniendo nuestros valores hallados, hacemos el circuito equivalente, y conectamos el elemento que no incluimos para que de este modo encontremos la variable que nos piden, entonces tenemos lo siguiente:

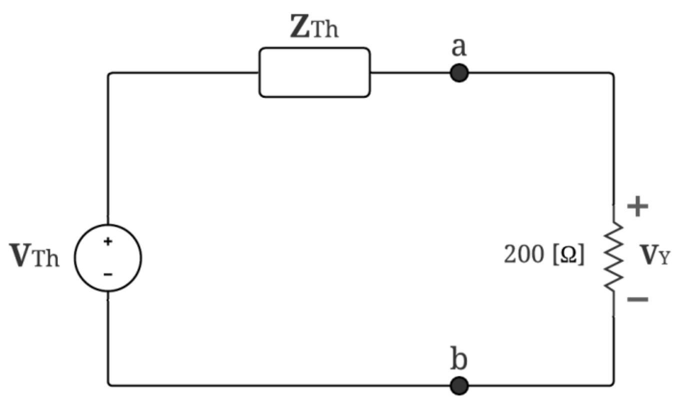

Figura 11

Divisor de tensión

$$\mathbf{V}_y = \frac{400}{400 + \mathbf{Z}_{Th}} \cdot \mathbf{V}_{Th}$$

$$\mathbf{V}_y = \left(\frac{400}{400 + 472.451 + j417.657}\right) \cdot \ 9320.64 \angle -31.4831°$$

$$\mathbf{V}_y = 3854.42 \angle -57.0643° \text{ [V]}$$