Ejercicio 1, Bobina

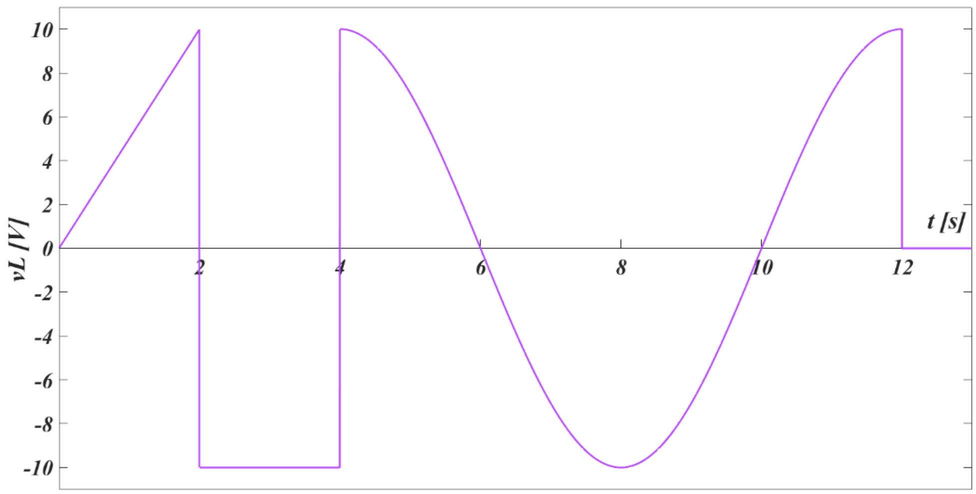

Figura 1

Una bobina es alimentada por una fuente de tensión la cual se describe en la Figura 1. Se sabe que $L = 5\ [H]$. Determine y grafique i_L, p_L y determine que intervalos almacena o entrega potencia.

Solución

Se sabe que la ecuación para hallar la corriente en la bobina está dada por la siguiente expresión:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v\ dt + i(t_0)$$

Aplicando esta ecuación para cada intervalo. Tenemos lo siguiente:

Para el intervalo de $0 \leq t < 2\ [s]$

Sabemos que $i(0) = 0[\mathrm{A}]$, se tiene que:

$$i_L = \frac{1}{5}\int 5t\ dt + 0$$

$$i_L = \frac{1}{2}t^2\ [\mathrm{A}]$$

Para el intervalo de $2 \leq t < 4\ [s]$

$$i_L = \frac{1}{5}\int -10\ dt + i(t_0)$$

$$i_L = -2t + \ i(t_0)[\mathrm{A}]$$

Para poder hallar $i(t_0)$ de una manera sencilla, hacemos lo siguiente:

Reemplazando en el intervalo similar y despejando $i(t_0)$, tenemos que:

$$\frac{1}{2}(2)^2 = -2(2) + \ i(t_0)$$

$$i(t_0) = 6 \text{ [A]}$$

Completando nuestra ecuación, tenemos que:

$$i_L = -2t + \ 6 \text{ [A]}$$

Para el intervalo de $4 \leq t < 12\ [s]$

Para este intervalo, debemos hallar la frecuencia angular, pero para ello, debemos encontrar el periodo de esta subfunción.

$$T = 12 - 4 = 8\ [s]$$

Por ende:

$$\omega = \frac{2\pi}{8} = 0.785398\ rad/s$$

Y se sabe que la amplitud es de 10 [V] y siguiendo la secuencia, tenemos que es una función $-\cos(\omega t)$, se tiene que:

$$v_L = -\,10\cos\left(\frac{2\pi}{8}t\right) \text{[V]}$$

$$i_L = -\frac{10}{5}\int \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ dt$$

$$i_L = -\frac{\frac{10}{5}}{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + K \text{ [A]}$$

$$i_L = -\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + K \text{ [A]}$$

Para poder encontrar nuestro valor de K, hacemos un procedimiento similar al intervalo anterior:

$$-2(4) + \ 6 = -\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{8}(4)\right) + K \text{ [A]} = 0$$

$$-2 = -\frac{8}{\pi}\sin(\pi) + K \text{ [A]}$$

Sabiendo que $\sin(\pi) = 0$, tenemos que:

$$K = -2\text{[A]}$$

Para este caso, nuestra $K = -2\text{[A]}$

Entonces, nuestras ecuaciones nos quedan de la siguiente manera:

$$i_L = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 \text{ [A]} & 0 \le t < 2 \;\; [s] \\ -2t + 6\text{[A]} & 2 \le t < 4 \;\; [s] \\ -\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\text{[A]} & 4 \le t < 12 \;\; [s] \end{cases}$$

En la Figura 2, encontraremos la función de i_L con los resultados obtenidos.

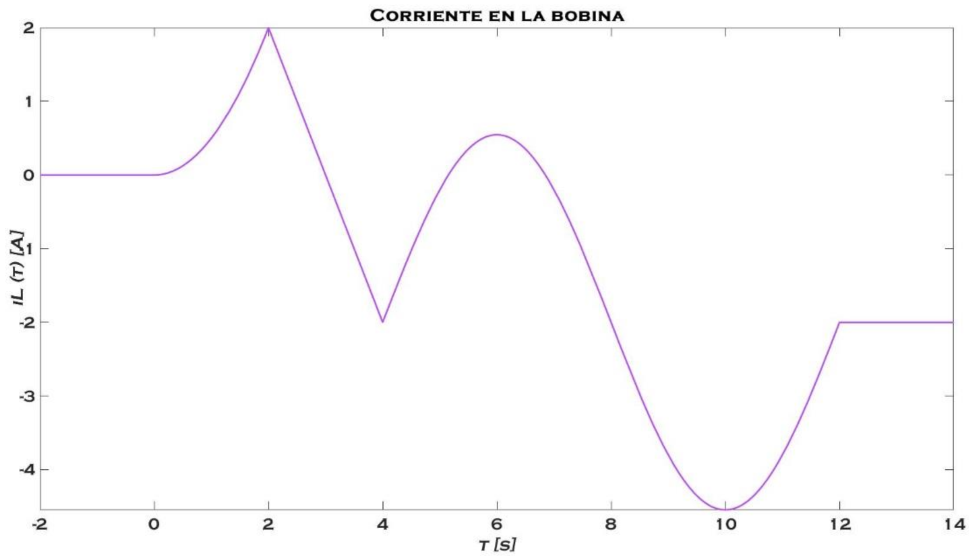

Figura 2

Por consiguiente, con los datos obtenidos, podemos encontrar las ecuaciones de potencia para cada intervalo, por ende, tenemos lo siguiente:

$$p = v \cdot i$$

Para el intervalo de $0 \le t < 2$ $[s]$

$$p_L = (5t) \cdot \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

$$p_L = \frac{5}{2}t^3 \text{ [W]}$$

Para el intervalo de $2 \le t < 4$ $[s]$

$$p_L = (-10) \cdot (-2t + 6\,)$$

$$p_L = 20t - 60 \text{ [W]}$$

Para el intervalo de $4 \le t < 12$ $[s]$

$$p_L = \left(-\,10\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) \cdot \left(-\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\right)$$

$$p_L = \left(\frac{80}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) + \left(20\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)\ \ [\mathrm{W}]$$

$$p_L = (25.4648\cos(0.785398\,t))\cdot(\sin(0.785398\,t)) + (20\cos(0.785398\,t))\ \ [\mathrm{W}]$$

Para la primera parte

Se sabe que $\frac{1}{2}\sin(2\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta)$, entonces tenemos lo siguiente:

$$p_L = \frac{24.4648}{2}\sin(2\cdot 0.78539816\cdot t)\ \ [\mathrm{W}]$$

$$p_L = 12.7324\sin(1.57079635\cdot t)\ \ [\mathrm{W}]$$

$$p_L = 12.7324\sin(1.57079635\cdot t) + (20\cos(0.785398\,t))\ \ [\mathrm{W}]$$

Entonces tenemos que:

$$p_L = \begin{cases} \frac{5}{2}t^3\ [\mathrm{W}] & 0 \le t < 2\ \ [s] \\ 20t - 60\ [\mathrm{W}] & 2 \le t < 4\ \ [s] \\ 12.7324\ \sin(1.57079635\cdot t) + (20\cos(0.785398\,t))\ [\mathrm{W}] & 4 \le t < 12\ \ [s] \end{cases}$$

Con estos datos, podemos graficar la función de potencia.

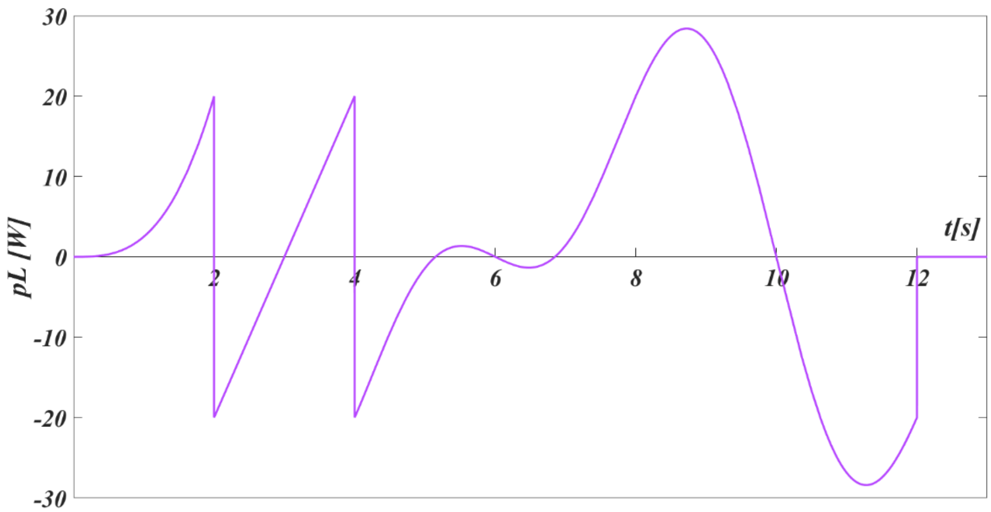

Figura 3

Según la gráfica de la Figura 3, podemos afirmar lo siguiente:

En los intervalos de $0 \leq t < 2\ [s]$, $3 \leq t < 4\ [s]$, $4 \leq t < 6\ [s]$, $8 \leq t < 10\ [s]$, se puede decir que están almacenando potencia, y para los intervalos $2 \leq t < 3\ [s]$, $6 \leq t < 8\ [s]$, $10 \leq t < 12\ [s]$, podemos afirmar que este elemento está entregando potencia.

Ahora para hallar energía, tenemos dos caminos diferentes para llegar al resultado, en primer lugar, integrando la potencia o, con base a la potencia, llegar a una ecuación en donde solo dependa de la corriente, con base a esto, tenemos lo siguiente:

$$P_L = v_L \cdot i_L = \left(L\frac{di_L}{dt}\right) \cdot i_L$$

$$E_L = \int_{t_0}^{t} p_L dt = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} i\, di = \frac{L}{2}\left[i_L^2(t)\right]_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$E_L(t) - E(t_0) = \frac{1}{2}L\, i_L^2(t) - \frac{1}{2}L\, i_L^2(t_0)$$

Teniendo nuestra ecuación, ahora aplicamos esta ecuación para cada intervalo, de este modo tenemos lo siguiente:

Para el intervalo de $0 \leq t < 2\ [s]$

$$E_L(t) - E(t_0) = \frac{1}{2}L\, i_L^2(t) - \frac{1}{2}L\, i_L^2(t_0)$$

$$E_L(t) = \frac{1}{2}(5)\left(\frac{1}{2}t^2\right)^2 - 0$$

$$E_L(t) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{4}t^4 = \frac{5}{8}\, t^4 \ \ [\mathrm{J}]$$

Para el intervalo de $2 \leq t < 4\ [s]$

$$E_L(t) = \frac{1}{2}(5) \cdot (-2t + 6)^2$$

$$E_L(t) = \frac{5}{2}\ (4t^2 - 24t + 36)$$

$$E_L(t) = 10t^2 - 60t + 90\ [\mathrm{J}]$$

Para el intervalo de $4 \leq t < 12\ [s]$

$$E_L(t) = \frac{1}{2}(5) \cdot \left(-\frac{8}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 2\right)^2$$

Sabemos que $\sin(\pi) = 0$, tenemos que:

$$E_L(t) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{64}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{16}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{16}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 4\right)$$

$$E_L(t) = \frac{160}{\pi^2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{80}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 10$$

Sabiendo que $\sin^2(t) \; = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, entonces tenemos lo siguiente:

$$E_L(t) = \frac{160}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{2}\right) + \frac{80}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\ [\mathrm{J}]$$

$$E_L = \begin{cases} \frac{5}{8}\,t^4\ [\mathrm{J}] & 0 \le t < 2\ [s] \\ 10t^2 - 60t + 90\ [\mathrm{J}] & 2 \le t < 4\ [s] \\ \frac{160}{\pi^2}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{2}\right) + \frac{80}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 10\ [\mathrm{J}] & 4 \le t < 12\ [s] \end{cases}$$

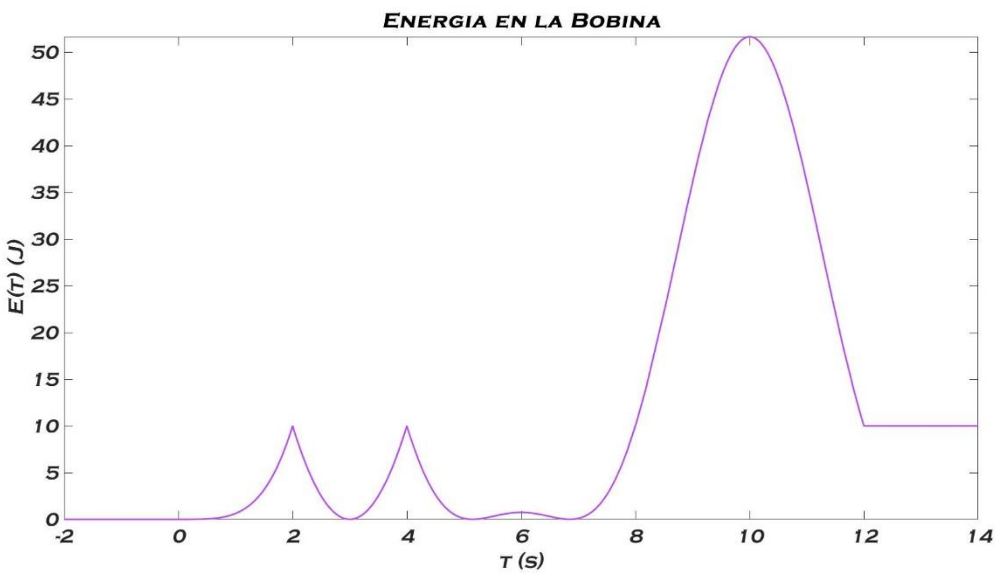

Figura 4