Ejercicio 5, Potencia en estado estable no sinusoidal y series de Fourier

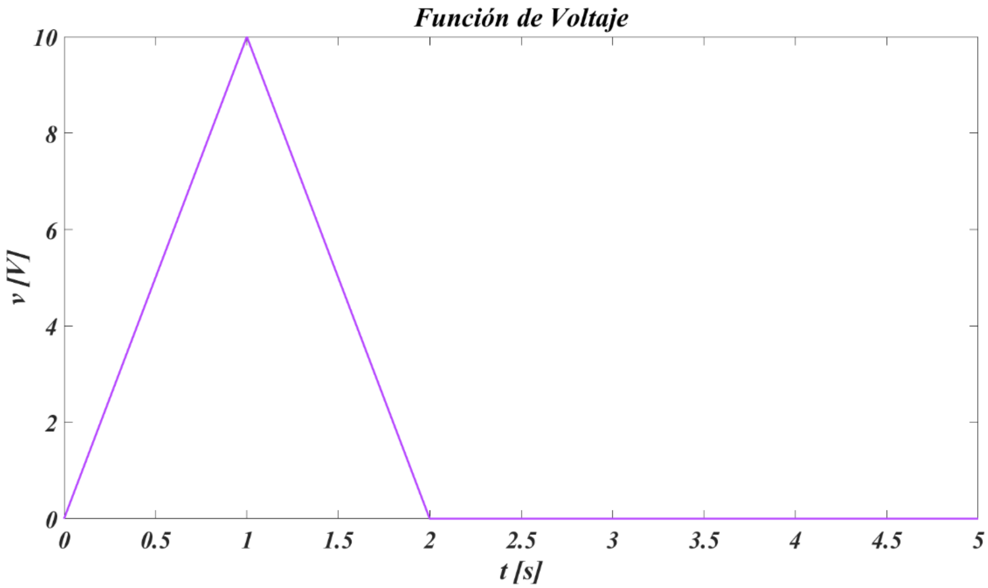

Figura 1

Para la señal de la Figura 1:

a) Obtenga la serie de Fourier.
b) Si esta señal se aplica a una resistencia de 50 [Ω], encuentre $i, P, S, F.P.$

Solución

En primer lugar, obtenemos las ecuaciones de nuestra señal de tensión, tenemos lo siguiente:

$$v = \begin{cases} 10t\ [\mathrm{V}] & 0 \leq t < 1\ [s] \\ 10(2-t)[\mathrm{V}] & 1 \leq t < 2\ [s] \\ 0\ [\mathrm{V}] & 2 \leq t < 4\ [s] \end{cases}$$

Teniendo nuestras ecuaciones, procedemos a encontrar los coeficientes de Fourier, sabiendo que:

$$T = 4[s], \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

Con estos datos, hallamos los coeficientes, en primer lugar a_0, tenemos que:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Reemplazando

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_0^1 10t\ dt + \frac{1}{4}\int_1^2 10(2-t)\ dt$$

$$a_0 = \frac{1}{4} 5t^2 \Big|_0^1 + \frac{10}{4}\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$a_0 = 2.5$$

Ahora tenemos que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

Reemplazando con datos de nuestro problema, tenemos lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{4}\int_0^1 10t\ \cos(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{4}\int_1^2 10(2-t)\ \cos(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{4}\int_2^4 0\ \cos(n\omega_0 t)\,dt$$

Resolviendo las integrales, tenemos que:

$$a_n = \frac{20}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t) + \frac{t}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_0^1 + \frac{10}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_1^2 + \frac{5}{n^2\omega_0^2}\cos(n\omega_0 t) + \frac{5t}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\Big|_1^2$$

Ahora reemplazando $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, tenemos que

$$a_n = \frac{20}{n\omega_0}\left(\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) + \frac{1}{n\omega_0}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{10}{n\omega_0}\left(\sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{5}{n^2\frac{\pi^2}{4}}\cos(n\pi) - \frac{5}{n^2\frac{\pi^2}{4}}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{10}{n\omega_0}\sin(n\pi) - \frac{5}{n\frac{\pi}{2}}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Ahora tenemos que:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Reemplazando con datos de nuestro problema, tenemos lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^1 10t\ \sin(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{4}\int_1^2 10(2-t)\ \sin(n\omega_0 t)\,dt + \frac{2}{4}\int_2^4 0\ \sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Resolviendo las integrales, tenemos que:

$$b_n = \frac{5}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\bigg|_0^1 - \frac{10}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\bigg|_0^1 - \frac{5}{n^2\omega_0^2}\sin(n\omega_0 t)\bigg|_1^2 + \frac{t}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\bigg|_1^2$$

Ahora reemplazando $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, tenemos que

$$b_n = \frac{5}{n^2\omega_0^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{10}{n\omega_0}\left(\cos(n\pi) - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{5}{n^2\omega_0^2}\left(\sin(n\pi) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{2}{n\omega_0}\cos(n\pi) - \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\omega_0}$$

2)

Teniendo la ecuación de voltaje y el valor de la resistencia, podemos encontrar la expresión para la corriente:

$$i = \begin{cases} 0.2t\ [\mathrm{A}] & 0 \le t < 1\ [s] \\ 0.4 - 0.2t[\mathrm{A}] & 1 \le t < 2\ [s] \\ 0\ [\mathrm{A}] & 2 \le t < 4\ [s] \end{cases}$$

Con la corriente ya hallada, podemos encontrar potencia aparente, entonces multiplicando cada intervalo similar, se tiene que:

$$p = \begin{cases} 2t^2\ [\mathrm{W}] & 0 \le t < 1\ [s] \\ 2t^2 - 8t + 8\ [\mathrm{W}] & 1 \le t < 2\ [s] \\ 0\ [\mathrm{W}] & 2 \le t < 4\ [s] \end{cases}$$

Ahora procedemos a encontrar variables solicitadas, pero, en primer lugar, debemos encontrar los valores eficaces de nuestro problema, entonces tenemos lo siguiente:

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T v^2\, dt}$$

Hallamos el valor R.M.S, reemplazamos y tenemos lo siguiente:

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 (10t)^2\, dt + \int_1^2 (20 - 10t)^2\, dt}$$

$$\mathrm{V} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 100t^2\, dt + \int_1^2 100t^2 - 400t + 400\, dt}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{100}{3} t^3 \Big|_0^1 + \frac{100}{3} t^3 \Big|_1^2 - \frac{400}{2} t^2 \Big|_1^2 + 400t|_1^2 \right]}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{100}{3}(1)^3 - \frac{100}{3}(0)^3 \right) + \left(\frac{100}{3}(2)^3 - \frac{100}{3}(1)^3 \right) - (200(2)^2 - 200(1)^2) + \left(400(2) - 400(1) \right) \right]}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left[\left(\frac{100}{3} \right) + \left(\frac{800}{3} - \frac{100}{3} \right) - (800 - 200) + (800 - 400) \right]}$$

$$V = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{200}{3} \right]} = \sqrt{\frac{50}{3}}$$

$$V = 4.08248 \text{ [V]}$$

Encontramos corriente por medio de la ley de Ohm

$$I = \frac{4.05248}{50} = 0.08165 \text{ [A]}$$

Con estos valores, podemos encontrar la potencia aparente, entonces:

$$S = V \cdot I = (4.08248) \cdot (0.08165)$$

$$S = 0.330885 \text{ [VA]}$$

Ahora encontramos potencia activa por medio de la potencia aparente, entonces tenemos lo siguiente:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

Reemplazando tenemos que:

$$P = \frac{1}{4} \int_0^1 2t^2 \, dt + \int_1^2 2t^2 - 8t + 8 \, dt$$

$$P = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 + \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 - 4t^2|_1^2 + 8t|_1^2 \right]$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(1)^3 + \left(\frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3}(1)^3\right) - (4(2)^2 - 4(1)^2) + \left(8(2) - 8(1)\right)\right]$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - 16 + 4 + 16 - 8\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}\right]$$

$$\mathrm{P} = \frac{1}{3}\ [\mathrm{W}]$$

Con el valor de potencia activa hallado, podemos encontrar el factor de potencia de la siguiente forma:

$$F.P. = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}$$

$$F.P. = \frac{\frac{1}{3}}{0.330885} = 1$$