



## 1. Información General

|                            |                          |            |            |                     |
|----------------------------|--------------------------|------------|------------|---------------------|
| <b>Espacio Académico</b>   | Cálculo Multivariado     |            |            |                     |
| <b>Código</b>              | 16                       |            |            |                     |
| <b>Tipo</b>                | Espacio teórico-práctico |            |            |                     |
| <b>Área</b>                | Componente Propedéutico  |            |            |                     |
| <b>Créditos académicos</b> | <b>HTD</b>               | <b>HTC</b> | <b>HTA</b> | <b>Horas/semana</b> |
|                            | 4                        | 2          | 3          | 9                   |
|                            | <b>3 créditos</b>        |            |            |                     |

## 2. Justificación

El estudio del cálculo en varias variables es una herramienta muy importante para el ingeniero, por cuanto el modelamiento de los fenómenos físicos y propios de la ingeniería, por lo general involucran más de una variable independiente respecto de una variable dependiente, que pueden ser en campos escalares o vectoriales.

El cálculo en varias variables proporciona a los ingenieros los conocimientos necesarios para operar y aplicar funciones matemáticas con variables reales en el planteamiento y solución de situaciones prácticas que llegan a presentarse en su ejercicio profesional. La derivada parcial, se considera un eje fundamental para el planteamiento y desarrollo de conceptos que permiten entender y asimilar conocimientos de casi todas las áreas de la ingeniería y la tecnología aplicada. En cuanto al concepto de integración múltiple, se alcanza una interrelación con otras áreas del conocimiento, especialmente la física, para finalmente abordar temáticas generales del saber específico en el campo profesional.

## 3. Objetivos

Objetivo general.

Proporcionar herramientas que permitan al estudiante plantear modelos en donde se puedan relacionar más de una variable independiente respecto de una variable dependiente, para modelar procesos de diferente tipo que involucran campos escalares o vectoriales.

Objetivos específicos

Diferenciar una función vectorial de una función escalar.

Plantear y resolver problemas en campos escalares, como por ejemplo problemas de optimización aplicados a la ingeniería.

Plantear y resolver problemas con campos vectoriales aplicados fundamentalmente a fenómenos físicos

Identificar la relación entre un campo vectorial y un campo escalar.

Reconocer las funciones de varias variables y valor real.

Utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización.

Integrar funciones de dos y tres variables sobre regiones en el plano y funciones de tres variables sobre regiones del espacio e interpretar algunas de sus aplicaciones como volúmenes y momentos y centros de masa.

Utilizar las integrales de línea para calcular el trabajo realizado por una fuerza al mover un objeto a lo largo de una trayectoria a través de un campo vectorial, y para calcular la masa de una masa de una varilla curvada de densidad variable.

Aplicar el teorema de Green para solucionar integrales de línea sobre campos vectoriales conservativos.

Aplicar el teorema de Stokes para resolver integrales de superficie.

#### 4. Requerimientos

- Álgebra básica y geometría.
- Cálculo diferencial e integral en una variable.
- Ecuaciones diferenciales y álgebra lineal.

#### 5. Aspectos pedagógicos

Se propone como esquema metodológico general la descripción de la teoría de manera rigurosa (desarrollo de pensamiento lógico formal) dentro de las posibilidades de construcción y participación de los estudiantes; ellos deben hacer un acercamiento previo a los temas por medio de lecturas sugeridas. En esta primera etapa surgen dudas y expectativas que enriquecen el aporte magistral del docente, presentando los tópicos básicos necesarios y suficientes para generar nuevos esquemas de representación.

En el **trabajo directo** se realizarán clases magistrales desarrolladas en torno a las preguntas de los estudiantes o a la presentación de los tópicos correspondientes al curso. El docente, en cada tema, hará una breve introducción que permita al estudiante orientar su trabajo en la búsqueda y construcción del conocimiento y avanzar en su proceso de formación integral.

Los temas que el estudiante no recuerde o en los que presente dificultades para el aprendizaje, y que no sean contemplados en esta propuesta son responsabilidad del estudiante bajo el trabajo cooperativo; debido a las falencias de la educación media, el grupo de ciencias básicas propone cursos de extensión, electivos o de nivelación para subsanar estas dificultades

Con el **trabajo cooperativo** se pretende estimular al estudiante en el trabajo en equipo por medio de actividades realizadas en grupos de máximo 5 estudiantes, con la asesoría y la retroalimentación del profesor. Para complementarlo se propone la implementación de un laboratorio de cómputo especializado en matemáticas, el cual contará con paquetes tales como MATLAB, MATHEMATICA, DERIVE, MATHCAD o MAPLE, y software libre. El trabajo cooperativo se fortalecerá en gran medida haciendo uso de las herramientas que un laboratorio como estos puede suministrar. Este laboratorio se crearía con el fin de realizar prácticas dirigidas y prácticas libres, que involucren los temas de los cursos propuestos.

El **trabajo autónomo** es un espacio en el que el estudiante realiza lecturas previas a la clase con el fin de optimizar el trabajo dirigido y potenciar la capacidad de comprensión del texto matemático. Incluye también el desarrollo o solución de ejercicios por medio de talleres suministrados por el docente y la revisión de los propuestos en clase.

## 6. Descripción de créditos

| Distribución de las actividades           |   | Horas semanales | Horas semestre | Número de créditos |
|---|---|-----------------|----------------|--------------------|
| Clase presencial (trabajo directo)        | Diagnóstico de conocimientos<br>Introducción de concepto<br>Ejemplificación del contenido<br>Preguntas en clase<br>Realización de ejercicios y problemas por parte del profesor<br>Talleres de refuerzo<br>Evaluación | 4               | 64             | 3                  |
| Acompañamiento (trabajo cooperativo)      | Seguimiento a los talleres y consultas<br>Talleres extraclase.  | 2               | 32             |                    |
| Actividades extractase (trabajo autónomo) | Lecturas previas<br>Talleres y consultas extraclase<br>Ejercicios y trabajos  | 3               | 48             |                    |
| <b>TOTAL</b>                              |   | 9               | 144            |                    |

## 7. Competencias e indicadores

| Nombre de la unidad temática                            | Competencias  | Indicadores de idoneidad  |
|---|---|---|
| Capítulo 1:<br>Funciones en varias variables.           | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa, crítica, creativa y analítica | Interpreta los conceptos de cálculo multivariado como una extensión natural del cálculo en una variable.<br>Define y aplica los conceptos de función en varias variables y resuelve correctamente ejercicios típicos.<br>Reconoce las funciones de varias variables y valor real.   |
| Capítulo 2:<br>Aplicaciones de las derivadas.           | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa.                               | Resuelve problemas que involucren derivadas de funciones en varias variables.<br>Comprende y utiliza el concepto de derivada parcial para resolver problemas de ingeniería.<br>Identifica y relaciona la forma de la integral y su respectivo método de solución.   |
| Capítulo 3:<br>Integrales múltiples                     | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa.                               | Adquirir conocimientos básicos de la teoría de integración para funciones en varias variables.<br>Valida los conceptos trabajados mediante la solución de ejercicios.<br>Identifica correctamente la región en el plano sobre la cual se va a integrar y define los límites de integración.   |
| Capítulo 4:<br>Aplicaciones de las integrales múltiples | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa.                               | Utiliza las integrales dobles para resolver problemas de volúmenes, momentos y centro de masa.<br>Plantea y resuelve problemas de áreas mediante integrales definidas.<br>Prueba la convergencia o no de algunas integrales impropias.<br>Valida los conceptos trabajados mediante la solución de ejercicios que lleven a integrales impropias.<br>Identifica las ecuaciones simétricas y paramétricas de una recta.<br>Identifica la ecuación general de un plano. |

**UNIVERSIDAD DISTRITAL “FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS”**  
**Facultad Tecnológica**

| Nombre de la unidad temática      | Competencias  | Indicadores de idoneidad  |
|-----------------------------------|---|---|
| Capítulo 5: Funciones vectoriales | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa, crítica, creativa y analítica | Adquiere dominio conceptual y operativo sobre funciones vectoriales. Utiliza las propiedades de derivación e integración de las funciones vectoriales para resolver problemas de velocidad, aceleración, longitud de arco y curvatura. Identifica los vectores tangentes y normales.  |
| Capítulo 5: Campos vectoriales    | Interpretativa, argumentativa, propositiva, comunicativa.                               | Adquirir dominio conceptual y operativo sobre los campos vectoriales. Define y calcula los vectores gradiente, divergencia y rotacional de un campo vectorial. Interpreta el significado físico de los conceptos y métodos del Análisis Vectorial. Utiliza correctamente el teorema fundamental de las integrales de línea. |

## 8. Contenido programático

|   | Semana/Sesión   | Lineamientos  | HSP | HSC | THS |
|---|---|---|-----|-----|-----|
| Capítulo 1: Funciones en varias variables | <u>1/1</u>  | Presentación del curso. Presentación de los contenidos temáticos, fechas de evaluaciones y porcentajes de las mismas. Bibliografía. | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>1/2</u>  | Definición de función en varias variables. Dominio, rango y gráfica de una función de varias variables.                             | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>1/3</u>  | Límites y continuidad de funciones de varias variables.   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>2/4</u>  | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>2/5</u>  | Derivadas parciales.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>2/6</u>  | Diferenciales. Regla de la cadena.  | 2   | 1   | 3   |
| Capítulo 2: Aplicaciones de las derivadas | <u>3/7</u>  | Derivadas de orden superior.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>3/8</u>  | Gradiente y derivadas direccionales. Aproximaciones lineales. Planos tangentes y rectas normales.                                   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>3/9</u>  | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre derivadas de funciones en varias variables.               | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>4/10</u>   | Extremos de funciones en dos variables. Puntos de ensilladura.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>4/11</u>   | Problemas de optimización.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>4/12</u>   | Multiplicadores de Lagrange.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>5/13</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>5/14</u>   | PRIMER PARCIAL  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>5/15</u>   | Integrales Múltiples. Sumas de Riemman, Integrales iteradas.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>6/16</u>   | Teorema de Fubini. Áreas y volúmenes.   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>6/17</u>   | Ejercicios de integrales dobles sobre regiones rectangulares.   | 2   | 1   | 3   |
| <u>6/18</u>                               | Ejercicios de integrales dobles sobre regiones más generales. | 2   | 1   | 3   |     |
| Capítulo 3: Integrales múltiples          | <u>7/19</u>   | Propiedades de las integrales dobles,   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>7/20</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>7/21</u>   | Cálculo de áreas por doble integración y valor promedio.  | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>8/22</u>   | Integrales dobles en forma polar. El triángulo polar.   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>8/23</u>   | Solución de ejercicios de integrales dobles en coordenadas polares.   | 2   | 1   | 3   |
|   | <u>8/24</u>   | Integrales triples en coordenadas rectangulares.  | 2   | 1   | 3   |

**UNIVERSIDAD DISTRITAL “FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS”**

**Facultad Tecnológica**

|   | <b>Semana/Sesión</b>   | <b>Lineamientos</b>  | <b>HSP</b> | <b>HSC</b> | <b>THS</b> |
|---|--|--|------------|------------|------------|
|   | <u>9/25</u>  | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>9/26</u>  | Volúmenes en coordenadas cilíndricas.  | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>9/27</u>  | Volúmenes en coordenadas esféricas.  | 2          | 1          | 3          |
| Capítulo 4. Aplicaciones de la integrales múltiples | <u>10/28</u>   | Cambio de variable en integrales múltiples. Jacobianos.  | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>10/29</u>   | Aplicaciones de las integrales múltiples: volúmenes. longitud de arco, centro de masa y momentos de inercia.                     | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>10/30</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>10/31</u>   | Curvas planas y ecuaciones paramétricas. Derivación e integración de paramétricas, longitud de arco y superficies de revolución. | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>11/32</u>   | Funciones Vectoriales. Definición de función vectorial, propiedades, derivación e integración de las funciones vectoriales.      | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>11/33</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>12/34</u>   | Velocidad y aceleración, vectores tangentes y vectores normales, longitud de arco y curvatura.                                   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>12/35</u>   | SEGUNDO PARCIAL.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>12/36</u>   | Solución del segundo parcial.  | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>13/37</u>   | Campos vectoriales. Integrales de línea.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>13/38</u>   | Cálculo de masa y momento.   | 2          | 1          | 3          |
| Capítulo 5. Campos vectoriales                      | <u>13/39</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>14/40</u>   | Integrales de línea en el plano.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>14/41</u>   | Integrales de línea en campos vectoriales.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>14/42</u>   | Integrales de línea con respecto a los ejes coordenados xyz.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>15/43</u>   | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>15/44</u>   | Trabajo realizado por una fuerza sobre una curva en el espacio. Independencia de la trayectoria, campos conservativos.           | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>15/45</u>   | Funciones potenciales. Teorema fundamental de las integrales de línea.   | 2          | 1          | 3          |
|   | <u>16/46</u>   | Teorema de Green. Rotacional y divergencia.  | 2          | 1          | 3          |
| <u>16/47</u>  | Integrales de superficie. Teorema de Stokes.                                       | 2  | 1          | 3          |            |
| <u>16/48</u>  | Trabajo de acompañamiento. Solución de dudas y desarrollo de taller sobre el tema. | 2  | 1          | 3          |            |
|   |  |  | <b>96</b>  | <b>48</b>  | <b>144</b> |

## 9. Estrategias de evaluación

|                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|
| Parciales                | X | Talleres, tareas y otros | X |
| Prácticas de laboratorio | X | Proyectos                | X |

## 10. Valoración de las estrategias de evaluación

|                            | <b>Estrategia</b> | <b>Porcentaje</b> | <b>Temas a evaluar</b> | <b>Fecha</b> |
|----------------------------|-------------------|-------------------|------------------------|--------------|
| <b>1<sup>ra</sup> Nota</b> | Parcial 1         | 25%               | Capítulos 1 y 2.       |              |
| <b>2<sup>ra</sup> Nota</b> | Talleres y Quizes | 10%               | Capítulos 1 y 2.       |              |

|                      |                   |     |                   |  |
|----------------------|-------------------|-----|-------------------|--|
| 3 <sup>ra</sup> Nota | Parcial 2         | 25% | Capítulos 2 y 3.  |  |
| 4 <sup>ta</sup> Nota | Talleres y Quizes | 10% | Capítulos 2 y 3.. |  |
| 5 <sup>ta</sup> Nota | Examen final      | 30% | Todos los temas.  |  |

## 11. Bibliografía y demás fuentes de documentación

- THOMAS, G. Cálculo, varias variables. Undécima edición. Pearson - Addison-Wesley. México 2006.
- STEWART, J. Cálculo, conceptos y contextos. Tercera edición. Cengage Learning. México 2006.
- APOSTOL, T. Calculus, 2 Vols., 2a. edición. Reverté. Barcelona 1974.
- MARSDEN, J. & TROMBA, A. Cálculo Vectorial, 3a. edición, Addison-Wesley Iberoamericana, Bogotá 1991.
- SIMMONS, G. F. Cálculo y Geometría Analítica, McGrawHill, Madrid, 2002.
- LARSON & HOSTETLER. Cálculo Vol.2. 6<sup>a</sup> edición. Edit. Mac Graw Hill.
- PURCELL, E. y otros. Cálculo. 8<sup>a</sup> edición. Editorial Pearson, 2001.